



---

## חשבון אינפיניטסימלי 3

---

מההרצאות של פרופ' מרק אגרנובסקי  
חשבון אינפיניטסימלי 3 88-230  
סמסטר א' התשעד  
הקליד וערך: בנימין לזין



**Eat**



**Sleep**



**Calculus**

4	פרק 1
4	מרחב $\mathbb{R}^n$
5	גאומטריה ב- $\mathbb{R}^n$
5	מכפלה פנימית
5	מכפלה פנימית סטנדרטית ב- $\mathbb{R}^n$
5	אי שוויון קושי
5	זווית
6	נורמה
6	נורמה אוקלידית
6	אי שוויון קושי
6	נורמות ב- $\mathbb{R}^n$
7	משפט (אי שוויון של Young)
7	משפט (אי שוויון של Holder)
8	טופולוגיה ב- $\mathbb{R}^n$
8	מרחק
8	כדור
9	כדורים
10	אי שוויון משולש
11	אלגברה ליניארית
11	בסיס
11	מרחבים אפינים (מישוריים, affine spaces)
11	נר-בסיס ב- $\mathbb{L}$
12	מישור אפיני על Hyperplane
12	קו ישר ב- $\mathbb{R}^n$
12	תורת הקבוצות ב- $\mathbb{R}^n$
14	גבול של סדרה
15	למה Balzano Weirtrass
17	גבול של פונקציה
18	גבול לפי Heine
19	גבול של פונקצית הרכבה
20	גבול של צמצום
22	גבול מחזורי Iterated limit
23	מבחן קושי של קיום גבול
24	קואורדינטות קוטביות (פולריות)
25	פונקציות רציפות ב- $\mathbb{R}^n$

26	משפט של <i>Weierstrass</i> על $min, max$ .....
28	רציפות במידה שווה.....
28	משפט <i>Cantor</i> .....
29	גזירות ב $\mathbb{R}^n$ .....
29	נורמה של אופרטור .....
29	אי שוויון נורמטיבי .....
30	גזירות ודיפרנציאל .....
32	למה B.-W.....
33	נגזרת חלקית.....
35	חס בין דפר' לבין נגזרת חלקית.....
36	מטריצה של Jacobi .....
39	נגזרת מכוונת ונגזרת לפי וקטור .....
41	נגזרת מכוונת <i>directional derivative</i> .....
43	דיפרנציאליות.....
44	משפט (תנאי מספיק לדיפ').....
47	משמעות גאומטרית של גזירות מישור משיק .....
47	מישור משיק .....
47	גרף של $f$ .....
48	משוואה של מישור משיק.....
49	דיפרנציאל של פונקציית הרכבה.....
49	משפט (כלל השרשרת).....
50	נוסחה למטריצת יעקובי .....
50	כלל שרשרת לנגזרות.....
52	נגזרות חלקיות מסדר גבוה .....
54	מולטי אינדקסים.....
54	דיפרנציאל מסדר גבוה.....
54	בינום של ניוטון מוכלל.....
57	נוסחה סימבולית.....
57	נוסחאות טיילור .....
57	נוסחת טיילור עם שארית בצורת לאגרנז'.....
59	משפט על ערך ממוצע.....
59	אומדן שארית בנוסחת טיילור.....
60	נוסחת טיילור עם שארית בצורה Peano.....
64	טור טיילור.....
65	קיצונים מקומיים.....

66	.....	תנאי הכרחי לקיצון מקומי
67	.....	תנאי מספיק לקיצון מקומי
67	.....	Quadratic Forms תבניות ריבועיות
69	.....	מחקר לסימן של מטריצה או תבנית ריבועית
69	.....	מטריצה אורטוגונלית
70	.....	Silvester קריטריון של
71	.....	דיפרנציאל שני
75	.....	Implicit Function פונקציה סתומה
78	.....	גזירות של פונקציה סתומה
79	.....	משפט על פונ' סתומה כללית
82	.....	כלל שרשרת:
83	.....	Inverse Function משפט על פונקציה הפוכה
84	.....	מטריצת יעקובי על פונ' הפוכה
86	.....	משטחים דיפרנציאליים ב- $\mathbb{R}^n$

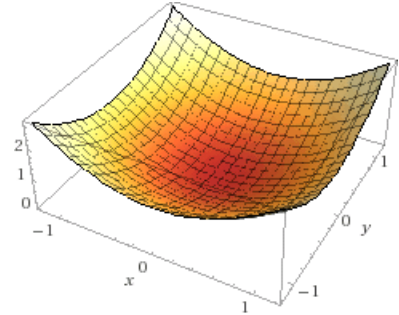
# הרצאה 1

דוגמא:

$$t = f(x, y, z)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$$



$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

# פרק 1

$\mathbb{R}^n$  מרחב

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

**הגדרה**

$\mathbb{R}^{n \in \mathbb{N}}$  הוא מרחב ליניארי מעל  $\mathbb{R}$ .

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

**תכונות**

אסוציאטיביות  $x + y = y + x$

קומוטטיביות  $x + (y + z) = (x + y) + z$

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$(\lambda \mu)x = \lambda(\mu x)$$

$$\exists 0 = (0, \dots, 0)$$

$$x + 0 = 0 + x = x, -x = (-x_1, \dots, -x_n)$$

## גאומטריה ב- $\mathbb{R}^n$

### מכפלה פנימית

$$\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$$

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad (1)$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad (2)$$

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle \quad (3)$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (4)$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

### מכפלה פנימית סטנדרטית ב- $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

### אי שוויון קושי

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

יש שוויון אם"ם  $x, y$  ת"ל.

### הוכחה

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \varphi(\lambda) := \langle y - \lambda x, y - \lambda x \rangle = \langle y, y \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\varphi(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

### זווית

$$x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\text{לפי אי שוויון קושי} \quad -1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}} \leq 1$$

$$\exists \varphi \in [0, \pi] : \cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}}$$

$$\varphi := \widehat{\langle x, y \rangle}$$

$$\langle x, y \rangle = \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \cos \varphi$$

**נורמה**

$$||x||$$

מקיים:

- (1)  $||x|| \geq 0$
- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (2)  $||ax|| = |a| ||x||$
- (3)  $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

**נורמה אוקלידית**

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$||x|| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

**אי שוויון קושי**

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| ||y||$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

**הוכחה**

$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq ||x||^2 + 2||x|| ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

**נורמות ב- $\mathbb{R}^n$**

$$||x||_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$$

$$||x||_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

**p-נורמה**

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad p \geq 1$$

$$||x||_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

**תרגיל בית**

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_{p \rightarrow \infty} ||x||_p = ||x||_\infty$$

**משפט:**

נורמה  $||x||_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$

**הוכחה**

$$||x||_p \geq 0$$

$$||x||_p \Leftrightarrow ||x||_p = 0$$

$$||\lambda x||_p = |\lambda| ||x||_p$$

נשאר להוכיח אי שוויון המשולש:

אי שוויון משולש: אי שוויון של Minkowski

משפט (אי שוויון של Young)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad p, q \geq 1$$

עבור  $p, q$  כאלה מתקיים:

$$\forall a, b > 0 : ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

הוכחה

$$\varphi(x) = e^x \text{ - קמורה (קעורה למעלה)}$$

$$\varphi''(x) = e^x > 0$$

אי שוויון ינסן:

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$$

$$e^{tx+(1-t)y} \leq te^x + (1-t)e^y$$

$$\left\{ t = \frac{1}{p}, 1-t = \frac{1}{q} \right\}$$

$$x = p \ln a, y = q \ln b$$

$$e^{\frac{1}{p} * p \ln(a) + \frac{1}{q} q \ln(b)} \leq \frac{1}{p} e^{p \ln(a)} + \frac{1}{q} e^{q \ln(b)}$$

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

משפט (אי שוויון של Holder)

$$x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

אזי:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

הוכחה

אם  $x = 0 \vee y = 0$  ברור, נניח שלא.

$$\|x\|_p = \|y\|_q = 1 \quad \text{אזי} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(2) אחרת נגרמל את הווקטורים:

$$x' := \frac{x}{\|x\|_p}, y' = \frac{y}{\|y\|_q}$$

$$\sum |x'_i y'_i| \leq 1$$



$$\sum \frac{|x_i||y_i|}{||x||_p ||y||_q} \leq 1$$

$$\sum |x_i y_i| \leq ||x||_p ||y||_q$$

הוכחה של אי שוויון מינקובסקי

$$||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

הוכחה

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

$$\begin{aligned} ||x + y||_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq \{Holder\} \leq \left( \sum |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \sum |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &||x + y||^p \leq (||x||_p + ||y||_p) \left( \sum |x_i + y_i|^p \right)^{1-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

אבל

$$\left( \sum |x_i + y_i|^p \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = ||x + y||_p^{p-1}$$

$$||x + y||_p^p \leq (||x||_p + ||y||_p) ||x + y||_p^{p-1}$$

ולכן

$$||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$$

## טופולוגיה ב $\mathbb{R}^n$

מרחק

$$||x|| \text{ נורמה, אזי } \rho(x, y) := ||x - y|| \text{ מטריקה}$$

כדור

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(a, x) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| < r\}$$

$a$  מרכז,  $r$  רדיוס

# הרצאה 2

## כדורים

$$a \in \mathbb{R}^n, r > 0$$

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$ : כדור פתוח:

$\bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$ : כדור סגור:

$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\}$ : ספרה:

### הגדרה

יהי  $\|\cdot\|$  נורמות, נאמר כי  $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$  (שקולות) אם קיים  $k, K > 0$  כך שלכל  $x \in \mathbb{R}^n$  מתקיים

$$k \|x\| \leq \|x\| \leq K \|x\|$$

### הערה

$$\|x - a\| < \epsilon \Rightarrow \|x - a\| \leq K\epsilon$$

$$x \in B_2(a, \epsilon) \Rightarrow x \in B_1(a, K\epsilon)$$

### דוגמא

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{n} \max |x_i| = \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty = \max |x_i| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty, \quad k = 1, K = \sqrt{n}$$

$$\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_\infty$$

### משפט

כל שתי נורמות  $\|\cdot\|, \|\cdot\|$  ב  $\mathbb{R}^n$  שקולות.

### הגדרה

הקבוצה  $A \subset \mathbb{R}^n$  תיקרא חסומה אם קיים  $M \geq 0$  כך  $\|x\| \leq M \forall x \in A$

$$A \subseteq \bar{B}(0, M)$$

### הגדרה

$\exists \epsilon: B(a, \epsilon) \subset U$  תיקרא נקודה פנימית אם  $a \in U, U \subseteq \mathbb{R}^n$

$\overset{\circ}{U} = \{U \text{ פנימית של } U\}$  - פנים  $\overset{\circ}{U} = \text{int}U$ .

### הגדרה

$U \subseteq \mathbb{R}^n$  תיקרא קבוצה פתוחה אם  $\overset{\circ}{U} = U$

$U$  פתוחה  $\Leftrightarrow$  כל נקודה פנימית  $a \in U$  היא פנימית.

### דוגמא

$$n = 1, U = (1, 2)$$

**הגדרה**

$B(a, \epsilon)$  תקרא  $\epsilon$ -סביבה של  $a$ .  
אם  $U \subset \mathbb{R}^n$  קבוצה פתוחה כך ש  $a \in U$  אזי  $U$  סביבה של  $a$ .

**הגדרה**

$F \subseteq \mathbb{R}^n$  נקראת קבוצה סגורה אם  $\mathbb{R}^n \setminus F$  היא קבוצה פתוחה.

**דוגמא**

$$[0,1] \in \mathbb{R}^2$$

**תרגיל**

$B(a, r)$  קבוצה פתוחה,  $\bar{B}(a, r)$  קבוצה סגורה.

**הוכחה**

$$U = B(a, r)$$

$$\epsilon = r - \|x_0 - a\| > 0$$

$$x \in B(x_0, \epsilon) \Rightarrow \|x - x_0\| < \epsilon$$

$$\|x - a\| = \|(x - x_0) + (x_0 - a)\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0 - a\| < \epsilon + \|x_0 - a\| = r$$

כלומר  $x \in B(a, r)$  ולכן  $B(x_0, \epsilon) \subset B(a, r)$ .

$\bar{B}(a, r)$  סגור אם"ם  $\mathbb{R}^n - \bar{B}(a, r)$  פתוחה.

$$\mathbb{R}^n - \bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| > r\}$$

$$x_0 \in \mathbb{R}^n - \bar{B}(a, r)$$

$$0 < \epsilon < \|x_0 - a\| - r$$

$$B(x_0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n - \bar{B}(a, r)$$

**אי שוויון משולש**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**הגדרה**

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $\forall \epsilon > 0 : B(p, \epsilon) \cap F \neq \emptyset$  נקודת הצטברות אם  $p \in \mathbb{R}^n$ .

**דוגמא**

$$F = [0,1)$$

נקודות ההצטברות הם  $[0,1]$ .

**הגדרה**

תהי  $F \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\bar{F} = \{ \text{כל נקודות הצטברות של } F \}$$

$\bar{F}$ -סגור של  $F$ .

$$F \subseteq \bar{F}$$

**משפט**

$F$ -סגורה אם"ם  $F = \bar{F}$

### הוכחה

נניח ש- $F$  סגורה.

$\mathbb{R}^n - F$  פתוחה.

$p \in \bar{F}$  נניח בשלילה כי  $p \notin F$ , אזי  $p \in \mathbb{R}^n - F$  ולכן  $B(p, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n - F$   $\exists \epsilon > 0$

$B(p, \epsilon) \cap F = \emptyset$  ולכן  $p \notin \bar{F}$  בסתירה וכלן  $F = \bar{F}$ .

הכיוון השני דומה.

### הגדרה

אם הקבוצה  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  היא

(1) חסומה

(2) סגורה

אזי  $F$  קומפקטית.

### דוגמא

(1)  $F = [1, \infty)$  לא חסומה ולכן לא קומפקט.

(2)  $F = (0, 1)$  לא קומפקט.

(3)  $F = [1, 2] \cup [3, 4]$  קומפקטי.

## אלגברה ליניארית

$X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$  תת מרחב ליניארי אם:

$$\forall x, y \in X_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha x + \beta y \in X_0$$

### בסיס

$\{e_1, \dots, e_m\} \subset X_0$  קבוצה בלתי תלויה ליניארית ומקיימת  $X_0 = \text{span}\{e_1, \dots, e_m\} = \{\sum_{i=1}^m d_i e_i : d_i \in \mathbb{R}\}$

$$m = \dim X_0$$

## מרחבים אפינים (מישוריים, affine spaces)

$$L = x_0 + X_0, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

אם  $e_1, \dots, e_m$  בסיס ב- $X_0$  אזי  $L = \{x = x_0 + \sum_{i=1}^m d_i e_i : d_i \in \mathbb{R}\}$

$$L = \{x_0 + \lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ ובדוגמא שלנו } \dim L = 1$$

$X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$  תת מרחב ליניארי.

$$\mathbb{R}^n = X_0 \oplus X_0^\perp$$

$$\forall x \in X_0, y \in X_0^\perp : \langle x, y \rangle = 0 \text{ (} x \perp y \text{)}$$

### השלמה אורתוגונלית לבסיס

יהי  $X_0 \subset \mathbb{R}^n$  תת מרחב ליניארי אזי  $\mathbb{R}^n = X_0 \oplus X_0^\perp$  ויתקיים  $\langle x, y \rangle = 0$   $\forall x \in X_0, y \in X_0^\perp$ .

$$\dim X_0 = n - 1, \dim X_0^\perp = 1 \text{ קו ישר.}$$

$X_0^\perp$  בסיס  $v$

$X_0 = \{A_1x_1 + \dots + A_nx_n = 0\}$  ש כך  $v = (A_1, \dots, A_n)$  כאשר  $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v \rangle = 0\}$ ,  $X_0^\perp = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$

באופן כללי  $\dim X_0 = m$

$$\dim X_0 = m \Rightarrow \dim X_0^\perp = n - m$$

$X_0^\perp$  בסיס  $\{v_1, \dots, v_{n-m}\}$

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_1 \rangle = \dots = \langle x, v_{n-m} \rangle = 0\}$$

$$v_j = (A_{1j}, \dots, A_{nj})$$

$$X_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n A_{ij}x_i = 0, j = 1, \dots, n - m \right\}$$

תת מרחב ליניארי  $\dim X_0 = m$

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \dots + A_{n1}x_n = 0 \\ \dots \dots \\ A_{1,(n-m)}x_1 + \dots + A_{n,(n-m)}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\text{rank}(A_{ij})_{i,j=1}^{n,n-m} = n - m$$

$n - m$  משוואות ליניאריות

### מישור אפייני על Hyperplane

$$\dim L = n - 1$$

$$L = a + X_0, \dim X_0 = n - 1$$

$$x \in L \Leftrightarrow x = a + u, u \in X_0 \Leftrightarrow x - a = u \in X_0$$

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : x - a \in X_0\}$$

$$\langle x - a, v \rangle = 0, v \in X_0^\perp$$

$$\boxed{A_1x_1 + \dots + A_nx_n = C}$$

$$a = (a_1, \dots, a_n) \quad C = A_1a_1 + \dots + A_na_n$$

עבור

### מקרה כללי

$$\dim L = m$$

$$L: \begin{cases} A_{11}(x_1 - a_1) + \dots + A_{n1}(x_n - a_n) = 0 \\ \dots \dots \\ A_{1,(n-m)}(x_1 - a_1) + \dots + A_{n,(n-m)}(x_n - a_n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \dots + A_{n1}x_n = C_1 \\ \dots \dots \\ A_{1,(n-m)}x_1 + \dots + A_{n,(n-m)}x_n = C_n \end{cases}$$

### קו ישר ב $\mathbb{R}^n$

$$L = a + X_0$$

$$\dim X_0 = 1$$

$$e \in X_0, e \neq 0$$

$$L = \{x = a + \lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$x - a = \lambda e$$

$$x_1 - a_1 = \lambda e_1$$

-----

$$x_n - a_n = \lambda e_n$$

$$\lambda = \frac{x_j - a_j}{e_j}$$

# הרצאה 3 – פרק 2

## גבול של סדרה

$$\{x^m\}_{m=1}^\infty, x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m)$$

$$x_m = (x_{m1}, \dots, x_{mn})$$

### הגדרה

תהי  $x^m \in \mathbb{R}^n$   $\{x^m\}_{m=1}^\infty$  גבול של הסדרה אם  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x^m - L\| = 0$ .  
 לא תלוי בבחירה של נורמה מכיון שאם  $\| \cdot \|$ ,  $\| \cdot \|$  נורמות ב  $\mathbb{R}^n$  אזי  $k \|x\| \leq \|x\| \leq K \|x\|$  ולכן  $k \|x^m - L\| \leq \|x^m - L\| \leq K \|x^m - L\|$  ולכן  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^m - L\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^m - L\| = 0$

$$L := \lim_{m \rightarrow \infty} x^m \quad x^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} L$$

$$L = \lim_{m \rightarrow \infty} x^m \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \bar{m} \forall m \geq \bar{m} : \|x^m - L\| < \epsilon$$

### משפט

$$\{x^m\}_{m=1}^\infty, x^m \in \mathbb{R}^n$$

$$x^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} L \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, n : x_j^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} L_j$$

### הוכחה

ניקח  $\|x\|_1$ .

בכיוון הראשון

$$\|x^m - L\|_1 = |x_1^m - L_1| + \dots + |x_n^m - L_n|$$

$$\forall j : 0 < |x_j^m - L_j| \leq \|x^m - L\|_1 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

ולכן לפי הלמה של הסנדוויץ'  $\forall j : x_j^m \rightarrow L_j$

בכיוון השני, אם  $\forall j |x_j^m - L_j| \rightarrow 0$  אזי

$$\|x^m - L\|_1 = |x_1^m - L_1| + \dots + |x_n^m - L_n| \rightarrow 0$$

ולכן  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = L$

**תכונות**

תהיו  $\{x^m\}_{m=1}^\infty, \{y^m\}_{m=1}^\infty$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = L$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} y^m = M$ , אזי  $\exists$

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} (\alpha x^m + \beta y^m) = \alpha L + \beta M \quad (1)$$

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} \langle x^m, y^m \rangle = \langle L, M \rangle \quad (2)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x^m| = |L| \quad (3)$$

**הוכחות**

(1) לפי קורדינטות.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle x^m, y^m \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum x_i^m y_i^m = \langle L, M \rangle \quad (2)$$

$$\left| |x^m| - |L| \right| \leq |x^m - L| \quad (3)$$

$$|x^m - L| \rightarrow 0 \Rightarrow |x^m| \rightarrow |L|$$

**תתי סדרה**

$$\begin{aligned} & \{x^m\}_{m=1}^\infty \\ & \mathbb{N} \ni j \rightarrow m_j \in \mathbb{N} \\ & j < s \Rightarrow m_j < m_s \\ & \{x^{m_j}\}_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

**משפט**

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

**הוכחה**

$$x^m \rightarrow L$$

$$\epsilon = 1 \exists \bar{m} \forall m \geq \bar{m} : |x^m - L| < 1$$

$$M := \max \{ |x^1|, \dots, |x^{\bar{m}-1}|, |L| + 1 \}$$

$$|x^m| = |L + (x^m - L)| \leq |L| + 1$$

$$m \geq \bar{m} \quad |x^m| \leq M$$

$$m \leq \bar{m} - 1 \quad |x^m| \leq M$$

**למה Balzano Weirtrass**

אם  $\{x^m\}_{m=1}^\infty$  חסומה אז קיימת תת סדרה  $\{x^{m_j}\}_{j=1}^\infty$  המתכנסת.

**הוכחה**

$$\forall m \in \mathbb{N} : |x^m| < C$$

$$|x^m|_\infty = \max \{ |x_1^m|, \dots, |x_n^m| \}$$

$$\forall j \quad |x_j^m| \leq C$$

נתחיל עם  $\{x_1^m\}_{m=1}^\infty$  חסומה, ולכן קיימת המתכנסת  $\{x_1^{m_{j_1}}\}_{j_1=1}^\infty$ .

נתבונן בסדרה  $\{x_2^{m_{j_1}}\}_{j_1=1}^\infty$  חסומה ולכן קיימת המתכנסת  $\{x_2^{m_{j_1 j_2}}\}_{j_2=1}^\infty$ , נמשיך כך עם כל הקורדינטות.

בסוף:  $\{x_n^{m_{j_1 \dots j_n}}\}_{j_n=1}^\infty$  תת סדרה של  $\{x^m\}_{m=1}^\infty$  המתכנסת.



## פונקציות

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$m = 1$  נאמר כי  $f$  סקלית

$m > 1$  נאמר כי  $f$  וקטור-פונקציה.

$\Omega = Dom(f)$  – תחום הגדרה,

## גרף

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

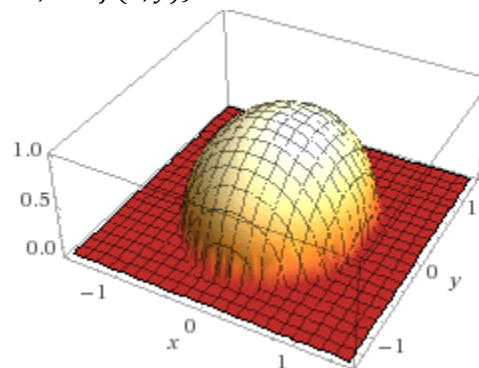
$$Graph(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m} : x_{n+1} = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x_{n+m} = f_m(x_1, \dots, x_n)\}$$

### דוגמאות

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (1)$$

$$Dom(f) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

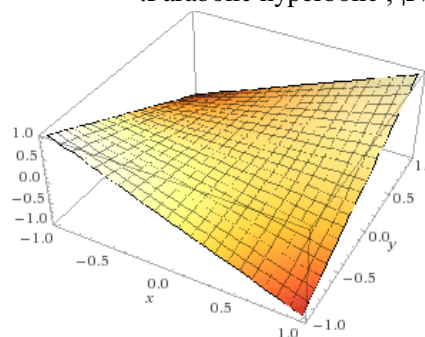
$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = f(x, y)\}$$



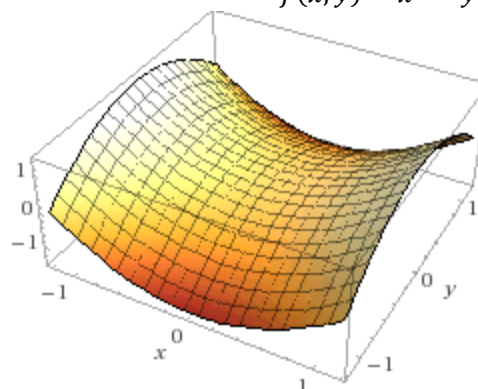
$$f(x, y) = xy \quad (2)$$

$$Dom(f) = \mathbb{R}^2, \quad \Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$$

אוכף, Parabolic hyperbolic.



$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad (3)$$



$$z = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = \{u = x - y, v = x + y\} = uv \text{ נשים לב כי}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

כלומר הפונקציה  $xy$  היא העצם הפונקציה שלנו עם סיבוב ב  $-\frac{\pi}{4}$  ועם מתיחה  $\sqrt{2}$ .

## גבול של פונקציה

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n$$

### הגדרה

$p$ -נקודת גבול,  $p \in \text{Lim} \Omega$  אם:

$$\forall \epsilon > 0 \exists x \in \Omega, x \neq p : \|x - p\| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 (B(p, \epsilon) - \{p\}) \cap \Omega \neq \emptyset$$

### הגדרה

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, p \in \text{Lim} \Omega$$

אומרים שווקטור  $L \in \mathbb{R}^n$  הוא גבול של  $f$  בנקודה  $p$  אם מתקיים:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega : x \neq p \wedge \|x - p\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon$$

$$L = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} L$$

### גאומטרי

$$L = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B(p, \delta) - \{p\}) \subset B(L, \epsilon)$$

# הרצאה 4

## גבול לפי Heine

### הגדרה

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$p \in \text{Lim} \Omega$$

$$L := (H) \lim_{x \rightarrow p} f(x) \Leftrightarrow \forall \{x^k\}_{k=1}^\infty, x^k \in \Omega, x^k \neq p : \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = p \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = L$$

### משפט

$$L = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \Leftrightarrow L = (H) \lim_{x \rightarrow p} f(x)$$

### הוכחה

נניח כי  $L = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$

ניקח כל סדרה  $\{x^k\}_{k=1}^\infty, x^k \in \Omega, x^k \neq p, \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = p$  נקבע  $\epsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in \Omega, 0 < \|x - p\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon$$

$$\exists \bar{k} \forall k \geq \bar{k} : \|x^k - p\| < \delta$$

בנוסף מתקיים  $x^k \neq p$ , ולפי בחירה של  $\delta$  מתקיים  $\|f(x^k) - L\| < \epsilon$  ולכן לפי הגדרה של גבול

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = L$$

נניח כי  $L = (H) \lim_{x \rightarrow p} f(x)$

נניח  $\neg \lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta, x \in \Omega, x \neq p \wedge \|f(x) - L\| \geq \epsilon$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : \delta = \delta_k = \frac{1}{k}$$

$$x_{\delta_k} := x^k$$

$$x^k \in \Omega, x^k \neq p$$

$$\|x^k - p\| < \delta_k = \frac{1}{k}$$

$$\|f(x^k) - L\| \geq \epsilon$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - p\| = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = p \Rightarrow \|f(x^k) - L\| \geq \epsilon \Rightarrow \neg (H) \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k)$$

### תכונות של גבול של פונקציה

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow p} g(x) = M$$

$$p \in \text{Lim}\Omega, f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow p} \alpha f + \beta g = \alpha L + \beta M \quad (1)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow p} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle L, M \rangle \quad (2)$$

$$m = 1, M \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow p} ||f(x)|| = ||L|| \quad (4)$$

למה

$$||f(x)|| \leq \alpha(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \alpha(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$$

### גבול של פונקציית הרכבה

#### Superposition

$$\Omega_1 \in \mathbb{R}^n, \Omega_2 \in \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l$$

$$f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$$

$$g: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^l$$

$$\forall x \in \Omega_1 : H := g(f(x))$$

$$h = g \circ f$$

דוגמא

$$h(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$g(u) = \sin(u)$$

$$h = g \circ f$$

משפט

תהי  $\Omega_1 \in \mathbb{R}^n, \Omega_2 \in \mathbb{R}^m$

$$f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$$

$$g: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^l$$

$$h = g \circ f$$

בניח כי

$$p \in \text{Lim}\Omega_1 \quad \lim_{x \rightarrow p} f(x) = q \quad (1)$$

$$q \in \text{Lim}\Omega_2 \quad \lim_{x \rightarrow q} g(x) = L \quad (2)$$

$$\exists \epsilon_0 > 0 \forall x \in \Omega_1, x \in B(p, \epsilon_0) \quad (3)$$

$$x \neq p \Rightarrow f(x) \neq q$$

אזי מתקיים

$$\exists \lim_{x \rightarrow p} h(x) = L$$

**הוכחה**

נניח כי  $L = (H) \lim_{x \rightarrow p} h(x)$

ניקח  $\{x^k\}_{k=1}^\infty, x^k \in \Omega, x^k \neq p, \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = p$

$f(x^k) \neq q, x^k \in B(q, \epsilon_0)$  (3) לפי  $y_k := f(x^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} q$  ולכן  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$

$$y_k \neq q, y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} q$$

$$L = \lim_{y \rightarrow q} g(y) \Rightarrow g(y^k) \rightarrow L$$

מה זה  $?g(y^k)$

$$g(y^k) = g(f(x_k)) = h(x_k)$$

ולכן

$$\forall x^k \in \Omega_1, x^k \neq p, x^k \rightarrow p : h(x^k) \rightarrow L$$

כלומר  $L = (H) \lim_{x \rightarrow p} f(x)$

**דוגמא**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2, g(u) = \frac{\sin(u)}{u}$$

$$p = (0,0), q = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f = q = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

$$h = g \circ f$$

$$\lim_{x \rightarrow p} h(x) = 1$$

**גבול של צמצום**

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\Omega_0 \subseteq \Omega$$

$$f|_{\Omega_0}(x) = f(x), x \in \Omega_0$$

**משפט**

$\Omega_0 \subseteq \Omega$  תני

$$p \in \text{Lim} \Omega_0 \subseteq \text{lim} \Omega$$

אם  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$  אזי גם קיים הגבול  $\lim_{x \in \Omega_0} f|_{\Omega_0}(x) = L$

**הוכחה**

נקבע  $\epsilon > 0$

$$\exists \delta \forall x \in \Omega : 0 < \|x - p\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon$$

$$\forall x \in \Omega_0 : 0 < \|x - p\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon$$

**תוכנית**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in \Omega}} f(x)$$

$$p \in \text{Lim} \Omega_0, \Omega_0 \subseteq \Omega \quad (1)$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow p} f|_{\Omega_0}(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow p} f(x)$$

אחרת

$$\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow p} f|_{\Omega_1}(x) \neq \lim_{x \rightarrow p} f|_{\Omega_2}(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow p} f(x)$$

אחרת

$$L = \lim_{x \rightarrow p} f|_{\Omega_0} \text{ מועמד לגבול.} \quad (3)$$

**דוגמא**

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \Omega_2 &:= \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2 \\ f(x, 0) &= f(0, y) = 0 \end{aligned}$$

אבל

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2 \\ f(x, x) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ולכן אין גבול.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \quad (2)$$

$$p = (0, 0), e = (e_1, e_2)$$

צמצום של  $f$  אל קו ישר  $(x, y) = t(e_1, e_2)$

$$f(te_1, te_2) = \frac{t^2 e_1^2 t e_2}{t^4 e_1^4 + t^2 e_2^2} = \frac{t e_1^2 e_2}{t^2 e_1^4 + e_2^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t e_1^2 e_2}{t^2 e_1^4 + e_2^2} &= 0 & e_2 \neq 0 \\ f(te_1, 0) &= 0 & e_2 = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} f(te_1, 0) &= 0 \end{aligned}$$

ניקח  $\Omega_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq 0, y = x^2\}$

$$f(x, x^2) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, x^2) = \frac{1}{2}$$

ולכן אין גבול.

גבול מחוזרר Iterated limit

$$n = 2$$

$$f(x, y) \quad (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

גבול מחוזרר:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right)$$

דוגמאות  
(1)

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0$$

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right) = -1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) = 1$$

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) ?$$

$$f(x, 0) = 1, f(0, y) = -1 \Rightarrow \lim f(x, 0) = 1 \neq -1 = \lim f(0, y)$$

ולכן אין גבול

הגבולות המחוזרים שונים ואין גבול לפונקציה עצמה.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$$

$$f(x, 0) = 0 = f(0, y)$$

$$f(x, x) = 1$$

כלומר אין גבול

# הרצאה 5

דוגמא

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \quad x, y \neq 0$$

נקבע  $y \neq 0$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \left( (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right)$$

ולכן אין גבול מחזורי, אבל יש קיים גבול!  $0 \leq |f(x, y)| \leq x^2 + y^2 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$

משפט

בניח שקיים

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

אם קיים

$$(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) := \varphi(x)$$

אז

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = L$$

הוכחה

נקבע  $\epsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta, (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

$$|f(x, y) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$y \rightarrow y_0 \Rightarrow |\varphi(x) - L| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

ואז לפי הגדרה של גבול  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = L$

## מבחן קושי של קיום גבול

משפט

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, p \in \text{Lim} \Omega$$

אז:

$$\exists \lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in \Omega, 0 < \|x - p\| < \delta, 0 < \|x' - p\| < \delta : \|f(x) - f(x')\| < \epsilon$$



## קואורדינטות קוטביות (פולריות)

$$n = 2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \arctan \frac{y}{x}$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

### דוגמאות

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad (1)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = ?$$

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

ולכן

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

דרך נוספת:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

$$|f(x, y)| = \left| \frac{r \cos \varphi r \sin \varphi}{r} \right| \leq r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} = \cos \varphi \sin \varphi$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \cos \varphi \sin \varphi$$

תלוי ב $\varphi$ , לא מתכנס.

### תרגילים

$$f(x, y) = (\sqrt{1 - x^2}, \ln(x^2 - y^2), \sin x \sin y) \quad (1)$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Omega = \{x, y \in \mathbb{R}^2: |x| > |y|, |x| \leq 1\}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{2+x-y}{1+2x^2+3y^2} = \frac{2-1}{1+3} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, -1)} \left( \frac{x-1}{y-1}, \frac{x^2+x-2}{x-1} \right) = \lim_{(x, y) \rightarrow (1, -1)} \left( \frac{x-1}{y-1}, \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} \right) = (0, 3) \quad (3)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq 0 \quad (5)$$

$$|f(x, y)| = \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{3x^2|y|}{x^2} = 3|y| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

$$|f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)| \leq \frac{3r^3 |\sin \varphi| |\cos \varphi|}{r^2} \leq 3r \rightarrow 0$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad (6)$$

$$|f(x, y)| = \frac{|x^3 - y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} = \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} + \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \rightarrow 0$$

$$f(x, y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = ?$$

$$f(\lambda e_1, \lambda e_2) = \frac{\lambda(e_1 - e_2)}{\lambda^{2\alpha}(e_1^2 + e_2^2)^\alpha} = \lambda^{1-2\alpha} \frac{e_1 - e_2}{(e_1^2 + e_2^2)^\alpha} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0 \Leftrightarrow 1 - 2\alpha > 0$$

לכן  $\exists \lim f = L$  אזי  $1 - 2\alpha > 0$  כלומר  $\alpha < \frac{1}{2}$ . אם הגבול קיים אז  $L = 0$

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha} \right| \leq \frac{|x|+|y|}{(x^2+y^2)^\alpha} \leq \frac{\sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^\alpha} = \sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\alpha} \rightarrow 0 : \alpha < \frac{1}{2}$$

כלומר גבול קיים אם  $\alpha < \frac{1}{2}$

### תזכורת

$$a, b > 0 : a + b \leq \sqrt{2}(a^2 + b^2)$$

$$a + b = 1a + 1b = |\langle (1,1), (a, b) \rangle| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$f(x, y) = \frac{x^\alpha y^4}{x^2 + y^2}, \quad \alpha > 0, (x, y) \neq 0 \quad (8)$$

$$|f(x, y)| \leq \left| \frac{x^\alpha y^4}{y^4} \right| \leq |x|^\alpha \rightarrow 0$$

## פונקציות רציפות ב- $\mathbb{R}^n$

### הגדרה

$$\Omega \in \mathbb{R}^n, p \in \Omega$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

אומרים ש  $f$  רציפה בנקודה  $p$  אם מתקיים התנאי :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in \Omega \quad ||x - p|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(p)|| < \epsilon$$

### משפט

אם  $p \in \Omega$  אבל  $p \notin \text{Lim} \Omega$  (מבודדת) אז  $f$  תמיד רציפה.

אם  $p \in \text{Lim} \Omega \cap \Omega$  אז  $f$  רציפה בנקודה  $p$  אם  $f(p) = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$

### תכונות

אם  $f, g$  רציפה בנקודה  $p$  אזי

$$p \text{ רציפות ב-} \alpha f + \beta g \quad (1)$$

$$\langle f(x), g(x) \rangle \text{ רציפה ב-} p \quad (2)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ רציפה אם } m = 1, g(p) \neq 0 \quad (3)$$

$$||f(x)|| \text{ רציפה} \quad (4)$$

**משפט**

יהי  $\Omega_1 \in \mathbb{R}^n, \Omega_2 \in \mathbb{R}^m$

$$f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2, \quad f: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^l$$

$$h := g \circ f$$

אם  $f$  רציפה ב  $p \in \mathbb{R}^n, q = f(p) \in \Omega_2$  אזי  $h$  רציפה ב  $p$ .

**דוגמא**

רציפות לפי כל משתנה

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j, \dots, x_n^0) \neq f \text{ רציפה}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases} \text{ לדוגמא}$$

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \text{ כלומר לא רציף ב } (0,0)$$

אבל  $f$  כן רציפה לגבי  $x, y$  בנפרד.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{x_0 y}{x_0^2 + y^2} & x_0^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x_0 = y = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0, y) = 0$$

ולכן  $f$  רציפה לגבי  $y$ .

כנ"ל  $f$  רציפה לגבי  $x$ .

**משפט של Weierstrass על  $\min, \max$**

תהי  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  קבוצה סגורה וחסומה (קומפקטית).

תהי  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  ונניח ש  $f$  רציפה על  $K$ , אזי

(1)  $f$  חסומה בקטע

(2) קיימות נקודות  $x_{min}, x_{max} \in K$  כך ש

$$f(x_{max}) = \sup_{x \in K} f(x) = \max_{x \in K} f(x)$$

$$f(x_{min}) = \inf_{x \in K} f(x) = \min_{x \in K} f(x)$$

# הרצאה 6

## הוכחה למשפט של ויירשטרס

(1) נניח כי לא חסומה

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists x_m \in K : \|f(x_m)\| \geq m$$

חסומה וסגורה  $K \Leftrightarrow$  קומפקט  $K$

$$\exists C \geq 0 : \|x_m\| \leq C \text{ ולכן } \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset K$$

לפי למה Belzana-Weierstrass קיימת תת סדרה  $\{x_{m_k}\}_{k=1}^\infty$  המתכנסת  $x_0$  סגורה  $K$ ,  $x_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$  נקודת הסתברות ולכן  $f(x_{m_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x_0)$  ולכן  $x_0 \in K$  ורציפה ב- $K$  ולכן  $|f(x_0)| = \infty$  בסתירה. ואז  $\|f(x_{m_k})\| \rightarrow \infty$  אבל  $\|f(x_{m_k})\| > m_k \rightarrow \infty$

$$M := \sup_{x \in K} f(x), \quad m := \inf_{x \in K} f(x), \quad m, M \in \mathbb{R} \quad (2)$$

נניח כי לא מקבלת ערך  $M$ , כלומר  $f(x) < M, \forall x \in K$

$$g(x) := \frac{1}{M - f(x)} \quad m - f(x) \geq 0$$

ולכן רציפה על  $K$ , לפי (1) חסומה:

$$\exists C > 0 : g(x) \leq C \quad \forall x \in K$$

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq C$$

$$\frac{1}{C} \leq M - f(x)$$

$$f(x) \leq M - \frac{1}{C}$$

$$M = \sup f(x) \text{ עם סתירה עם } M - \frac{1}{C} < M$$

## מסקנה

כל נורמות ב- $\mathbb{R}^n$  שקולות.

בהוכחה שהופיע בהרצאה היית מעגל לוגי, פה מופיע ההוכחה שהמרצה הביא בהרצאה הבאה.

## הוכחה

$$\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2, \| \cdot \|_\infty \Rightarrow \| \cdot \|_1 \sim \| \cdot \|_2 \sim \| \cdot \|_\infty$$

נראה כי כל נורמה שקולה ל- $\| \cdot \|_2$ , ולכן כל זוג נורמות שקולות.

יהי  $\| \cdot \|$  נורמה ב- $\mathbb{R}^n$ , צ"ל  $\| \cdot \| \sim \| \cdot \|_2$ , כלומר  $\exists m, M > 0 : m \|x\|_2 \leq \|x\| \leq M \|x\|_2$

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$$

$$\varphi(x) := \|x\|$$

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \leq |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_n| \|e_n\| \leq \sqrt{\|e_1\|^2 + \dots + \|e_n\|^2} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = C \|x\|_2$$

$$\|x^k - x^0\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, x^k \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x^0$$

$$\left| \|x^k\| - \|x^0\| \right| \leq \|x^k - x^0\| \leq C \|x^k - x^0\|$$

$$x^k \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x^0 \Rightarrow \varphi(x^k) \rightarrow \varphi(x^0)$$

$\exists x_{max}, x_{min} \in K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$  W. לפי משפט

$$\sup_{x \in K} \varphi(x) = \varphi(x_{max}) = M$$

$$\inf_{x \in K} \varphi(x) = \varphi(x_{min}) = m$$

$$\|x\| = \varphi(x) \neq 0, x \in K \Rightarrow m, M > 0$$

$$\exists \{x^{k_i}\}_i, \|x^{k_i} - x^0\|_2 \rightarrow 0, x^{k_i} \rightarrow x^0$$

$$\forall x \in K : 0 < m \leq \|x\|_2 \leq M$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

$$x' = \frac{x}{\|x\|_2} \in K$$

$$m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \leq M$$

$$m \|x\|_2 \leq \|x\| \leq M \|x\|_2$$

## רציפות במידה שווה

### הגדרה

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$f$  רציפה במ"ש על  $\Omega$  אם  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \Omega, \|x' - x''\| < \delta \Rightarrow \|f(x') - f(x'')\| < \epsilon$

### משפט Cantor

תהי  $f: K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , נניח כי  $K$  קומפקט ו- $f$  רציפה ב- $K$ , אז  $f$  רציפה במ"ש.

### הוכחה

נניח ש- $f$  לא רציפה במ"ש.

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x', x'' \in K, \|x' - x''\| < \delta \wedge \|f(x') - f(x'')\| \geq \epsilon$$

$$\delta := \frac{1}{k}, k = 1, 2, \dots$$

$$x' := x'_k$$

$$x'' := x''_k$$

$$\|x'_k - x''_k\| < \frac{1}{k} \wedge x'_k, x''_k \in K$$

וגם

$$\|f(x'_k) - f(x''_k)\| \geq \epsilon$$

לפי למה  $\exists x'_{k_i} \rightarrow x_0 \in K$  B-W

$$x''_{k_i} = x'_{k_i} + (x''_{k_i} - x'_{k_i})$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ x_0 & 0 \end{matrix}$$

$$x''_{k_i}, x'_{k_i} \rightarrow x_0$$

$f(x'_{k_i}) \rightarrow f(x_0), f(x''_{k_i}) \rightarrow f(x_0)$  ולכן רציפה  $f$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (f(x'_{k_i}) - f(x''_{k_i})) = 0$$

אבל  $\|f(x'_{k_i}) - f(x''_{k_i})\| \geq \epsilon > 0$  בסתירה.

## גזירות ב $\mathbb{R}^n$

אופרטור ליניארי  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

בסיס ב  $\mathbb{R}^n$ :  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

### נורמה של אופרטור

$L$  - פונ' רציפה. גם  $\|L(x)\|$  רציפה.

$$M := \sup_{\|x\| \leq 1} \|L(x)\|$$

לפי משפט Weirstrass  $M < \infty$

$$\|L\| := M$$

### אי שוויון נורמטיבי

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \|L(x)\| \leq \|L\| * \|x\|$$

### הוכחה

$x = 0$  טריוויאלי

$x \neq 0$

$$x' = \frac{x}{\|x\|} \Rightarrow \|x'\| = 1$$

$$\|L(x')\| \leq \|L\|$$

$$\frac{1}{\|x\|} \|L(x)\| = \left\| L \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \|L\|$$

$$||L(x)|| \leq ||L|| ||x||$$

## גזירות ב- $\mathbb{R}^n$

### הגדרה

$$\alpha(x), \beta(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} 0$$

$$\alpha(x) = o(\beta(x)), x \rightarrow p$$

$$\frac{\alpha(x)}{||\beta(x)||} \xrightarrow{x \rightarrow p} 0$$

הגדרה שקולה:  $\alpha(x) = o(\beta(x)) \Leftrightarrow \alpha(x) = \epsilon(x)\beta(x), \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} 0$

$$\alpha(x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = o(1)_{x \rightarrow p}$$

### גזירות ודיפרנציאל

$$n = 1$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} := f'(a) \text{ אם } a \text{ גזירה ב-} a$$

$$\epsilon(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - k \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$$f(x) - f(a) = k(x - a) + \epsilon(x)(x - a)$$

$$x - a = h$$

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + kh + \epsilon(a+h)h \quad \epsilon(a+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}$$

### הגדרה

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$a \in \Omega$  נקודה פנימית,  $a \in \Omega^o$

אומרים כי  $f$  דיפרנציאלית (גזירה) בנקודה  $a$  אם מתקיים קיים אופרטור ליניארי  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  כך ש:

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \epsilon(h)||h||$$

$$\epsilon(h)||h|| = o(||h||), h \rightarrow 0. ||h|| < \delta, \epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

אופרטור  $L$  דיפרנציאל של  $f$  בנקודה  $a$ .

$$L := df_a$$

$$h \in \mathbb{R}^n : L(h) = df_a(h)$$

### משפט

$df_a$  הוא יחיד.

### הוכחה

נניח כי  $\exists L_1, L_2$  אופ' לינא'

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= L_1(h) + \epsilon_1(h)|h| \\ f(a+h) - f(a) &= L_2(h) + \epsilon_2(h)|h| \\ 0 &= L_1(h) - L_2(h) + (\epsilon_1(h) - \epsilon_2(h))|h| \end{aligned}$$

נקבע  $0 \neq h_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} h &= th_0, t \in \mathbb{R} \\ 0 &= tL_1(h_0) - tL_2(h_0) + (\epsilon_1(th_0) - \epsilon_2(th_0))|t||h_0| \\ 0 &= L_1(h_0) - L_2(h_0) + (\epsilon_1(th_0) - \epsilon_2(th_0))|t||h_0|\frac{1}{t} \\ t \rightarrow 0 : 0 &= L_1(h_0) - L_2(h_0) \Rightarrow L_1 = L_2 \end{aligned}$$

### דוגמה

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (xyz, x + z^2) \\ f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2, a = (2, 1, 0) \end{aligned}$$

$$h = (h_1, h_2, h_3)$$

$$\begin{aligned} f(2+h_1, 1+h_2, h_3) &= ((2+h_1)(1+h_2)h_3, 2+h_1+h_3^2) = (h_3(2+h_1+2h_2+h_1h_2), 2+h_1+h_3^2) = \\ &= (2h_3+h_1h_3+2h_2h_3+h_1h_2h_3, 2+h_1+h_3^2) = (0, 2) + (2h_3, h_1) + o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\right) \end{aligned}$$

$$|h_i h_j| \leq \frac{|h_i|^2 + |h_j|^2}{2} \leq \frac{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\right)^2}{2} \text{ כי } o(\quad) \text{ זה}$$

$$f(a) = (0, 2), df_a = (2h_3, h_1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$



# הרצאה 7

למה B.-W.

$$\forall \{x^k\}_{k=1}^\infty, \|x^k\|_2 \leq C \Rightarrow \exists \{x^{k_i}\}_{i=1}^\infty : x^{k_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x^o, \|x^{k_i} - x^o\|_2 \rightarrow 0$$

## גזירות

$$a \in \overset{o}{\Omega}$$

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  דיפרנציאל באם  $a$   $\exists L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  כך ש:

$$\|h\| < \delta : f(a+h) - f(a) = L(h) + \epsilon(h)\|h\|$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

$$L := df_a$$

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(\|h\|)_{h \rightarrow 0}$$

## משפט

אם  $f$  דיפ' באם  $a$  אזי רציפה שם.

$$a+h = x$$

$$f(x) = f(a) + df_a(x-a) + o(\|x-a\|)_{x \rightarrow a}$$

$$x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow f(a)$$

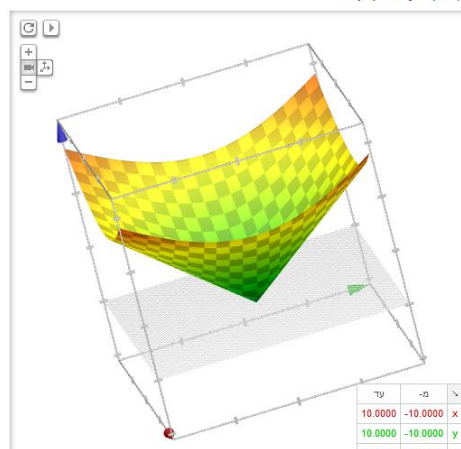
ולכן רציף.

## דוגמא

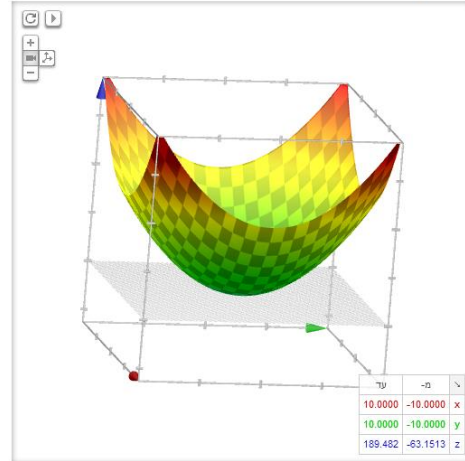
$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, a = (0,0) \quad (1)$$

לא דיפ'.

גרף ל- $\sqrt{x^2+y^2}$



$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (2)$$



$$L \stackrel{?}{=} 0$$

$$f(a + h) \stackrel{?}{=} f(a) + D + \epsilon(h) \|h\|$$

$$h = (h_1, h_2) \Rightarrow h_1^2 + h_2^2 = \epsilon(h) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\epsilon(h) = \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \xrightarrow{(h_1, h_2) \rightarrow 0} 0$$

כן דיפ'.

## נגזרת חלקית

### הגדרה

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in \overset{\circ}{\Omega}$$

נקבע  $n, 1 \leq i \leq n$ , קיימת נגזרת חלקית של  $f$  בנקודה  $a$  לפי  $x_j$  אם קיים הגבול

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

$$e_j = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$$

### סימונים

$$n = 1 : f', \frac{df}{dx}$$

$$n = 2 : \frac{\partial f}{\partial x_j}, D_j f, f'_{x_j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}$$

כלומר

$$\varphi(u) := f(a_1, \dots, a_{j-1}, u, \dots, a_n)$$

$$\varphi(a_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

נגדיר

$$\Psi(t) := f(a + te_j)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(t) - \Psi(0)}{t} = \Psi'(0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \frac{d}{dt} f(a + te_j)|_{t=0}$$

**דוגמא**

$$f(x, y) = \arctan(\ln x e^{\sin(x^2+y^2)})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2013) = 0$$

מספיק להציב  $x = 1$  בשביל למצוא את הנגזרת.

## יחס בין דפר' לבין נגזרת חלקית

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \right)$$

משפט

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in \overset{\circ}{\Omega}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df_a(e_j) \text{ אזי לכל } 1 \leq j \leq n \text{ קיימת}$$

הוכחה

$$L := df_a$$

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \epsilon(h)|h|$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

$$f(a+te_j) - f(a) = L(te_j) + \epsilon(te_j)|t| |e_j|$$

$$L(te_j) = tL(e_j), |e_j| = 1$$

$$\frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = L(e_j) + \underbrace{\frac{|t|}{t} \epsilon(te_j)}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t} = L(e_j)$$

משפט

$$\forall h \in \mathbb{R}^n : df_a(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$$

הוכחה

$$h = \sum_{j=1}^n h_j e_j$$

$$df_a(h) = df_a\left(\sum_{j=1}^n h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n h_j df_a(e_j) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$$

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

$$L = df_a(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$$

$$L(h) = (L_1(h), \dots, L_m(h))$$

$$\forall 1 \leq j \leq n : L_j(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(a) h_j$$

לכן:

$$\begin{pmatrix} L_1(h) \\ \vdots \\ L_n(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

מטריצה של האופרטור  $L = df_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$df_a \sim \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{m,n}$$

### מטריצה של Jacobi

$$J_f(a) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{m,n}$$

$$df_a(h) = J_f(a)h$$

### דוגמא

$$f(x, y, z) = (\sin xy, x^2 + y^2 + z), f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$df(1,2) = ?$$

$$J_f(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \cos xy & x \cos xy & 0 \\ 2x & 2y & 1 \end{pmatrix} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = \begin{pmatrix} 2 \cos 1 & \cos 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

### $m = 1$

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

$$J_f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

גרדיאנט של  $f$  בנק'  $a$

$$\text{grad } f(a) = \nabla f(a) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \dots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix}$$

$$df_a(h) = J_f(a)h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

**דוגמא**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

גזירה בנקודה  $a = (0, 0)$

$$|f(x, y)| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow 0} 0 = f(0, 0) : \text{רציפה ב} a \quad (1)$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)? \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \frac{df}{dx}(x, 0)|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \frac{df}{dy}(0, y)|_{y=0} = 0 \end{aligned}$$

גזירות? (3)

$$L = df_a(h) = \sum_{j=1}^n \frac{df}{dx_j}(a) h_j$$

אם  $df_a \equiv 0$  קיים אז

$$f(a + h) = f(a) + df_a(h) + \epsilon(h) \|h\|_{h \rightarrow 0}$$

$$\frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0 + 0 + \epsilon(h) \|h\|_{h \rightarrow 0}$$

$$\epsilon(h) = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} \xrightarrow{\text{גבול לא קיים}} 0$$

הוכח לפני

ולכן לא גזיר ב  $a$ .

**דוגמא**

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$\sqrt{|xy|} = 0 + \epsilon(x, y) \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\epsilon(x, y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$x \neq 0 : \epsilon(x, x) = \frac{|x|}{\sqrt{2}|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 0$$

# הרצאה 8

## דוגמאות

$$f(x, y) = xy + \sin(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + \cos(x^2 + y^2) 2x$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$a = (0, 0)$$

$$L \equiv 0$$

$$f(h) = f(0) + L(h) + \epsilon(h)|h| \quad \epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\epsilon(h) = \frac{f(h)}{|h|} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

כלומר  $f$  דיפ' ב  $a = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$(x, y) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \left( -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

אבל זה לא מוגדר ב  $(0, 0)$ , גם הגבול לא מוגדר.

$$2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

$$-\frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \rightarrow \text{אין גבול}$$

## הגדרות

$U \subset \mathbb{R}^n$  קבוצה פתוחה, נסמן  $U \subset \circ \mathbb{R}^n$  (Open).

$$D(U) = \{ \forall u \in U \text{ כל פונקציות דיפרנציאל ב } \}$$

$$C(U) = \{ \forall u \in U \text{ כל פונקציות רציפה ב } \}$$

$$D(U) \subset C(U)$$

**פעולות**

$$\begin{aligned}
 & f(x) \equiv c \quad \forall a \in \mathbb{R}^n : df_a(h) \equiv 0 \quad .1 \\
 f(a+h) - f(a) &= df_a + o(\|h\|)_{h \rightarrow 0} \Rightarrow 0 = c - c = 0 + 0 \\
 & f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = x \quad df_a(h) = h \quad .2 \\
 a+h - a &= h + \epsilon(h)\|h\| \quad \epsilon(h) \equiv 0 \\
 & dL_a = L, \text{ אופרטור ליניארי, } f(x) = L(x) \quad .3 \\
 L(a+h) - L(a) &= L(h) + 0 \\
 f(a+h) - f(a) &= L(h) + 0 \\
 & m = 1 \quad .4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f(x)g(x) \\
 d_a(fg)(h) &= f(a)dg_a(h) + g(a)df_a(h) \\
 f(a+h) &= f(a) + df_a(h) + o(\|h\|)_{h \rightarrow 0} \\
 g(a+h) &= g(a) + dg_a(h) + o(\|h\|)_{h \rightarrow 0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f(a+h)g(a+h) \\
 &= f(a)g(a) + \underbrace{f(a)dg_a(h) + g(a)df_a(h)}_{\text{ליניארי}} \\
 &+ \underbrace{f(a)o(\|h\|) + g(a)o(\|h\|) + df_a(h)o(\|h\|) + dg_a(h)o(\|h\|) + o(\|h\|)o(\|h\|) + dg_a(h)df_a(h)}_{o(\|h\|)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|df_a(h)\| &\leq \|df_a\|\|h\| \\
 \|dg_a(h)\| &\leq \|dg_a\|\|h\| \\
 \|df_a(h)dg_a(h)\| &\leq \|df_a\|\|dg_a\|\|h\| \\
 df_a(h)dg_a(h) &= o(\|h\|)_{h \rightarrow 0}
 \end{aligned}$$

**נגזרת מכוונת ונגזרת לפי וקטור**

**הגדרה**

$$\begin{aligned}
 & f: \underset{\substack{\Omega \\ \subseteq \mathbb{R}^n \\ \circ \\ a \in \Omega}}{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m
 \end{aligned}$$

נקבע  $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$

אומרים קיימת נגזרת של  $f$  ב  $a$  לפי הווקטור  $h$  אם קיים:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} := \partial_h f(a)$$

$$\partial_h f(a) = \frac{d}{dt} f(a+th)|_{t=0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_{e_j} f(a)$$



**משפט**

אם  $f$  דיפרנקודה  $a$  אז לכל  $h \in \mathbb{R}^n$   $h \neq 0$  קיימת  $\partial_h f(a) = df_a(h)$  ו

**הוכחה**

$$\begin{aligned} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} &= \frac{f(a) + t * df_a(h) + o(|t||h|) - f(a)}{t} = df_a(h) + \frac{o(|t||h|)}{t} \\ \frac{o(|t||h|)}{t} &= \frac{\epsilon(|t||h|)|t||h|}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \\ \exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} &= df_a(h) = \partial_h f(a) \end{aligned}$$

**$m = 1$**

$$(\partial_h f)(a) = df_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

אם  $f$  דיפר  $a$ .

**דוגמא**

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

$$a = (0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

$$h = (1, 1) \quad \partial_h f(0, 0) = \frac{d}{dt} |_{t=0} \sqrt{|tt|}$$

$$\sqrt{th_1 th_2} = |t| \sqrt{h_1 h_2} = |t|$$

מסקנה:  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  לא דיפר  $a$ .

**דוגמא**

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

לא רציף ב  $(0, 0)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$f(x, 0) = f(0, y) = 0$$

$$h = (h_1, h_2)$$

$$(x, y) = t(h_1, h_2) = (th_1, th_2)$$

$$\Omega := \{(x, y) \mid x^2 < y < 2x^2\}$$

$$(x, y) \in \Omega \Leftrightarrow x^2 < y < 2x^2 \Leftrightarrow t^2 h_1^2 < th_2 < 2t^2 h_1^2$$

$$t, h_1, h_2 > 0 : \text{בלי הגבלת הכלליות} \Rightarrow h_2 < 2th_1^2 \wedge t > \frac{h_2}{2h_1^2}$$

$$0 < t < \frac{h_2}{2h_1^2} \Rightarrow (th_1, th_2) \notin \Omega$$

אם  $0 < t < \frac{h_2}{2h_1^2}$  אז  $f(th_1, th_2) = 0$  ולכן  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = 0$  קיבלנו  $\forall h \exists \partial_h f(0,0)$  אבל  $f$  לא דיפ' ב  $(0,0)$  ולא רציפה.

## נגזרת מכוונת directional derivative

$e$  כיוון, ניקח  $\|e\| = 1$ .

### הגדרה

נגזרת של  $f$  בנק'  $a$  לפי הכיוון  $l$  המוגדר ע"י  $e$ .

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \partial_e f(a)$$

### דוגמא

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = ?$$

$l$  - כיוון - זווית  $\alpha$  עם ציר  $x$ .

$$e = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = \partial_e f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), e \rangle$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2} \cos \alpha + \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2} \sin \alpha$$

$e$  - כיוון המוגדר ע"י  $h = (1,1)$

$$\partial_h f(x, y) = \langle \nabla f(x, y), h \rangle$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x, y) = \langle \nabla f(x, y), e \rangle$$

$$e = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{(1,1)}{\|1,1\|_2}$$

### משפט

$f$  דיפ'  $(m = 1)$  ב- $a$ , אז  $\|\partial_e f(a)\| \leq \|\nabla f(a)\|_2$  אם  $\|e\|_2 = 1$   $\forall e$ .

### הוכחה

$$|\partial_e f(a)| = |\langle \nabla f(a), e \rangle| \leq \|\nabla f(a)\|_2 \|e\|_2 = \|\nabla f(a)\|_2$$

נניח  $\nabla f(a) \neq 0$ . נגדיר  $e_0 = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ , אזי

$$\partial_{e_0} f(a) = \langle \nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} \rangle = \frac{1}{\|\nabla f(a)\|} \langle \nabla f(a), \nabla f(a) \rangle = \|\nabla f(a)\|$$

**מסקנה**

$$e_0 = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$$

אז לכל  $e: \|e\|_2 = 1$  מתקיים  $|\partial_e f(a)| \leq |\partial_{e_0} f(a)|$

$$e = \pm \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$$

יש שוויון אם"ם

כלומר:

$$|\partial_{e_0} f(a)| = \max_{\|e\|=1} |\partial_e f(a)|$$

**מסקנה**

גרדיאנט הוא כיוון של שינוי ב  $a$  המקסימלי.

$$\partial_{e_0} f(a) = \langle \nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} \rangle = \|\nabla f(a)\| > 0$$

$$\partial_{-e_0} f(a) = -\|\nabla f(a)\| \leq 0$$

כלומר ירידה מקסימלית.

**דוגמא**

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

$(x_0, y_0)$  מה הכיוון של שינוי מקסימלי?

$$e_0 = \frac{(-2x_0, -2y_0)}{\sqrt{4x_0^2 + 4y_0^2}}$$

צריך ללכת תמיד בכיוון  $(-x_0, -y_0)$

# הרצאה 9

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + o(\|h\|)_{h \rightarrow 0}$$

$$o(\|h\|)_{h \rightarrow 0} = \epsilon(h)\|h\| \quad \epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + o(\|x - a\|)_{x \rightarrow a}$$

**m = 1:**

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o(\|h\|)_{h \rightarrow 0}$$

$$f(x) = f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle + o(\|x - a\|)_{x \rightarrow a}$$

דיפרנציאליות

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \langle \nabla f(a), h \rangle}{\|h\|} = 0 \Rightarrow \forall i \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \underbrace{\epsilon(x-a)}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} 0} \|x - a\|$$

$$f(x) \approx f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + o(\|x - a\|)_{x \rightarrow a} \quad \text{זה קירוב לפונקציה:}$$

דוגמא

$$f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1+xy} \quad |x|, |y| \ll 1$$

$$a = 0 : f(x, y) \approx f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2} = \frac{1+xy - (x+y)y}{(1+xy)^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$$

$$\arctan \frac{x+y}{1+xy} \approx x+y + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

**דוגמא**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \in \mathbb{R}^2$  לכל  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  אבל  $f$  לא דיפ'  $(0,0)$ .

**משפט (תנאי מספיק לדיפ')**

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in \overset{\circ}{\Omega}$  : ניח כי:

(1) קיימות  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  לכל  $x$  בסביבה  $B_a(\delta) \subset \Omega$

(2)  $\forall i: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  רציפות ב  $B_a(\delta)$ .

אזי  $f$  דיפ' בנקודה  $a$ .

**הוכחה**

ניקח  $n = 2$

$$\|h\| < \delta : f(a+h) - f(a) \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + \underbrace{\epsilon(h)}_{\epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \|h\|$$

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = \underbrace{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2)}_{\text{שינוי לגבי } x} + \underbrace{f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)}_{\text{שינוי לגבי } y}$$

לפי משפט Lagrange למשתנה אחד  $g(x_0 + h) - g(x_0) = g'(x_0 + \theta h)h$

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2)h_1 \quad 0 < \theta_1 < 1$$

$$f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2)h_2 \quad 0 < \theta_2 < 1$$

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 &= \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2)h_2 - \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 \\ &= \alpha(h)h_1 + \beta(h)h_2 \end{aligned}$$

$$\alpha(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2)h_1 - \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1, \quad \beta(h) = \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2 + \theta_2 h_2)h_2 - \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2$$

$$f(a+h) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 = \alpha(h)h_1 + \beta(h)h_2$$

הנגזרות החלקיות רציפות ולכן  $\alpha(h) \rightarrow 0$   
 $\beta(h) \rightarrow 0$   $h \rightarrow 0$

$$\|\alpha(h)h_1 + \beta(h)h_2\| \leq |h_1| \|\alpha(h)\| + |h_2| \|\beta(h)\| \leq \sqrt{\|\alpha(h)\|^2 + \|\beta(h)\|^2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\left\| \frac{\alpha(h)h_1 + \beta(h)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right\| \leq \sqrt{\|\alpha(h)\|^2 + \|\beta(h)\|^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\alpha(h)h_1 + \beta(h)h_2 = o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)_{h \rightarrow 0}$$

לכן קיבלנו

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)$$

ולכן דיפ' בנקודה  $a$ .

**עבור  $m > 2$**

$$\begin{aligned} & f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) = \\ & = f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) \\ & + f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_2) \\ & + f(a_1, a_2, a_3 + h_3, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, a_3 + h_3, \dots, a_n + h_n) \\ & + \dots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

לפי משפט לגראנז'  $f(a+h) - f(a) = \alpha_1(h)h + \dots + \alpha_n(h)h_n - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$  כאשר  $\alpha_i \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

$$\left| f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i \right| \leq \sqrt{|\alpha_1(h)|^2 + \dots + |\alpha_n(h)|^2} \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$$

$$\Rightarrow f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i = o(\|h\|)_{h \rightarrow 0}$$

**דוגמא שבה הפונקציה דיפ' אבל התנאים לא מתקיימים**

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

$$a = (0,0)$$

$$f(h) = \underbrace{f(0)}_0 + \underbrace{L(h)}_0 + \underbrace{\epsilon(h)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \|h\| \quad \text{דיפ' ?}$$

$$(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \stackrel{?}{=} o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$\frac{(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow 0} 0$$

$$df_a = 0$$

לא חסומות סביב  $(0,0)$   $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$(x, y) \neq (0,0): \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \left(-\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}\right)$$

$$2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow 0} 0$$

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}: x = 0 \text{ לא חסומה סביב } x = 0 \text{ לא } -\frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$$

ולכן  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$  לא חסומה בסביבה של  $(0,0)$ .

**דוגמא**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$a = (0,0)$$

(1) רציפות

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x(x^2 - y)}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = |x|$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \text{ ולכן רציפה}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \quad (2)$$

$$f(x,0) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$

$$f(0,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

מועמד לדיפ':  $L(h) = h_1$ 

$$L(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = h_1$$

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \epsilon(h)|h|_{h \rightarrow 0}$$

$$\frac{h_1^3 - h_1 h_2^3}{h_1^2 + h_2^2} = 0 + h_1 + \epsilon(h) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

נבדוק כי  $\epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ 

$$\epsilon(h) = \frac{h_1^3 - h_1 h_2^3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{h_1^3 - h_1 h_2^2 - h_1^3 - h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\epsilon(h_1, h_1) = -\frac{2h_1^3}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h_1^3}{|h_1|^3} \xrightarrow{h_1 \rightarrow 0} 0$$

כלומר  $f$  לא דיפ' ב  $(0,0)$ .**תרגיל בית**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ לא רציפות.} \quad (2)$$

$$n = 1 : f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

## משמעות גאומטרית של גזירות מישור משיק

### מישור משיק

נניח ש  $f$  דיפ' בנקודה  $a$ ,  $m = 1$  אזי

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + o(\|x - a\|)_{x \rightarrow a}$$

### גרף של $f$ :

$$\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n) \in \text{Dom}(f), x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$$



# הרצאה 10

$$\begin{aligned} \Gamma_f \\ l(x) &= f(a) + df_a(x - a) \\ f(x) &= l(x) + O(\|x - a\|),_{x \rightarrow a} \end{aligned}$$

$\Gamma_f$  – מישור משיק ל $\Gamma_f$  בנקודה  $(a, f(a))$ .

$$l(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) = A_1 x_1 + \dots + A_n x_n + B$$

$\Gamma_l$  – מישור אפיני עבור הנקודה  $(a, f(a))$ .

$$f(x) - l(x) = O(\|x - a\|),_{x \rightarrow a}$$

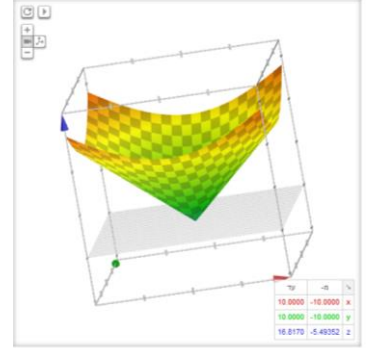
## דוגמא

$$n = 2$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

ניקה מישור  $z = 0$  ב $a = (0, 0)$ .  $f(x) - l(x) = \sqrt{x^2 + y^2} = \|x, y\|$ . ולכן זה לא  $O(\|x - 0\|)$ , כל מישור משיק אחר יהיה  $f(x) - f(a) = \alpha \|x, y\|$  ולכן זה לא מישור משיק.



b

## משוואה של מישור משיק

$$x_{n+1} = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)$$

$$T_{(a, f(a))}(\Gamma_f)$$

$$a_{n+1} = f(a) = f(a_1, \dots, a_n)$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - a_{n+1} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \\ a_{n+1} &= f(a) \end{aligned}$$

$$n = 2$$

$$a = (x_0, y_0)$$

$$f(a) = z_0$$

$$z = f(x, y), (x, y) \in U$$

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

המשוואה של  $T_{(x_0, y_0, z_0)}$ :

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

**דוגמא**

$$z = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$$

$$(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma_f, x_0^2 + y_0^2 < 1, z_0 = \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}$$

$$z - z_0 = \frac{-x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}(x - x_0) + \frac{-y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}(y - y_0)$$

$$z - z_0 = -\frac{x_0}{z_0}(x - x_0) - \frac{y_0}{z_0}(y - y_0)$$

$$z_0 z - z_0^2 = -x_0 x + x_0^2 - y_0 y + y_0^2$$

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$$

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = 1$$

## דיפרנציאל של פונקציית הרכבה

**משפט (כלל השרשרת)**

$$U_1 \subset \mathbb{R}^n, U_2 \subset \mathbb{R}^m$$

$$U_1 \xrightarrow{u} U_2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

בנייה ש:

$$(1) \quad a \in U_1 \text{ דיפ' } u$$

$$(2) \quad b = u(a) \in U_2 \text{ דיפ' } f$$

אזי הפונ'  $g(x) = f(u(x))$  היא דיפ' ב  $a$  ומתקיים  $dg_a = df_b \circ du_a$ .

**הוכחה**

$$L := du_a, M := df_b$$

$$u(a+h) = u(a) + L(h) + \underbrace{\epsilon_1(h)}_{\epsilon_1(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \|h\|$$

$$f(b+k) = f(b) + M(k) + \underbrace{\epsilon_2(k)}_{\epsilon_2(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0} \|k\|$$

$$g(a+h) = f(u(a+h)) = f(u(a) + L(h) + \epsilon_1(h)\|h\|) = f\left(b + \underbrace{L(h) + \epsilon_1(h)\|h\|}_k\right)$$

$$f(b) + M(L(h) + \epsilon_1(h)|h|) + \epsilon_2(L(h) + \epsilon_1(h)|h|) \left\| L(h) + \epsilon_1(h)|h| \right\|$$

$$f(b) = f(u(a)) = g(a)$$

$$g(a+h) = g(a) + M(L(h)) + \underbrace{M(\epsilon_1(h)|h|)}_{\alpha(h)} + \underbrace{\epsilon_2(L(h) + \epsilon_1(h)|h|) \left\| L(h) + \epsilon_1(h)|h| \right\|}_{\beta(h)}$$

$o(|h|)?$

$$\frac{\alpha(h)}{|h|} = \frac{|h|M(\epsilon_1(h))}{|h|} = M(\epsilon_1(h))$$

$$\left| \frac{\alpha(h)}{|h|} \right| \leq \|M\| \|\epsilon_1(h)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \alpha(h) = o(|h|)_{h \rightarrow 0}$$

$$\left\| L(h) + \epsilon_2(h)|h| \right\| \leq \|L(h)\| + \|\epsilon_1(h)\| |h| \leq \|L\| |h| + \|\epsilon_1(h)\| |h|$$

$$\begin{aligned} \frac{\|\beta(h)\|}{|h|} &\leq \frac{\|\epsilon_2(L_1(h) + \epsilon_1(h))|h|\|}{|h|} (\|L\| |h| + \|\epsilon_1(h)\| |h|) \\ &= \|\epsilon_2(L(h) + \epsilon_1(h))\| (\|L\| + \|\epsilon_1(h)\|) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ &\Rightarrow \beta(h) = o(|h|)_{h \rightarrow 0} \end{aligned}$$

כלומר:  $g(a+h) = g(a) + M(L(h)) + o(|h|)_{h \rightarrow 0}$

ולכן  $g$  דיפ' בא  $a$  ומתקיים  $df_b(du_a(h)) = dg_a(h)$

### נוסחה למטריצת יעקובי

$$J_{f \circ u}(a) = J_f(u(a)) * J_u(a)$$

### כלל שרשרת לנגזרות

$$g = f \circ u; l = 1$$

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n))$$

$$J_g(a) = J_f(u(a)) J_u(a)$$

$$\left( \frac{\partial g}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(u(a)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(u(a)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(a) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_i}(u(a)) \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(a)$$

\*  $g'_{x_k} = f'_{u_1} u'_{1,x_k} + \dots + f'_{u_m} u'_{m,x_k}$

\*יש להיזהר לא להתבלבל עם הצבות, ב  $f'_{u_j}$  מציבים  $u(a)$  וב  $u'_{j,x_k}$  מציבים  $a$ .

**תרגילים**  
(1)

$$g(x, y, z) = f\left(\frac{u}{x+y+z}, \frac{v}{x^2+y^3+z^4}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y+z, x^2+y^3+z^4) + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y+z, x^2+y^3+z^4)2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial u}(, ) + \frac{\partial f}{\partial v}(, )3y^3$$

$$g(x, y, z) = f(xyz) \quad (2)$$

$$f(u); u = xyz$$

$$g'_x(x, y, z) = f'_x(xyz)yz$$

**הגדרה**

$\forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, \dots, x_n)$  אם  $m$  מסדר הומוגניות מסדר  $m$

בניח  $f$  דיפ', אזי:  $f$  הומו' מסדר  $m \Leftrightarrow m f(x) = \frac{x_1 \partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$  (משוואת אויילר ממד"ח).

**הוכחה**

←

$$f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$$

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x)x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x)x_n = m\lambda^{m-1}f(x)$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = m f(x)$$

⇒

$$\lambda^{-m} f(\lambda x) = const \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} (\lambda^{-m} f(\lambda x)) = 0?$$

$$-m\lambda^{-m-1}f(\lambda x) + \lambda^{-m} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x)x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x)x_n \right) =$$

$$-m\lambda^{-m-1}f(\lambda x) + \lambda^{-m-1} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}_{m f(\lambda x)} \right) = 0$$

$$\lambda = 1 : f(x) = c \Rightarrow \frac{f(\lambda x)}{\lambda^m} = f(x)$$

**דוגמאות**

$$f(x, y) = x + y, f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

# הרצאה 11

## נגזרות חלקיות מסדר גבוה

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$U \subset \circ \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(x), x \in U, 1 \leq i_1 \leq n$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left( \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) (x), x \in U \text{ נניח כי קיימת}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_{r-1}}} \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_{r-2}}} \left( \dots \left( \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \right) \right) (x), x \in U \text{ נניח שקיימת}$$

$$1 \leq i_1, \dots, i_{r-1} \leq n$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_{r-1}}} \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_{r-2}}} \left( \dots \left( \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \right) \right) \right) (a), a \in U \text{ נניח שקיימת}$$

**דוגמה**

$$f(x, y) = f(x) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

$$a = (0, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (a) \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{d}{dy} f(0, y)|_{y=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}{y} = x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = 1$$

$$f(x, y) = -f(y, x)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (0, 0) = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (a) \neq \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

**משפט**

$$U \subset \circ \mathbb{R}^2 \quad f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

נניח כי:

$$\exists \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y), \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) \quad (1)$$

$$\text{רציפות ב} U. \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y), \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) \quad (2)$$

$$\text{אזי } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y)$$

**הוכחה**

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= f(a+h, b+h) - f(a, b+h) - f(a+h, b) + f(a, b) = \\ &= [f(a+h, b+h) - f(a, b+h)] - [f(a+h, b) - f(a, b)] \end{aligned}$$

$$\text{נגדיר } \varphi(t) := f(a+h, t) - f(a, b)$$

$$\Delta^2 = \varphi(b+h) - \varphi(b) = (Lagrange) = \frac{d\varphi}{dt} \left( b + \underbrace{\theta_1}_{0 < \theta_1 < 1} h \right) h$$

$$\frac{d\varphi}{dt} (b + \theta_1 h) = \frac{\partial f}{\partial y} (a+h, b + \theta_1 h) - \frac{\partial f}{\partial y} (a, b + \theta_1 h) = (Lagrange) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (a + \theta_2 h, b + \theta_1 h) h$$

$$\Delta^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (a + \theta_2 h, b + \theta_1 h) h^2 \Leftrightarrow \frac{\Delta^2}{h^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (a + \theta_2 h, b + \theta_1 h)$$

$$\text{מצד שני: } \Delta^2 = [f(a+h, b+h) - f(a+h, b)] - [f(a, b+h) - f(a, b)]$$

$$\psi(t) := f(t, b+h) - f(t, b)$$

$$\Delta^2 = \psi(a+h) - \psi(a) = \frac{\partial \psi}{\partial t} (a + \mu_1 h) h$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} (a + \mu_1 h) = \frac{\partial f}{\partial x} (a + \mu_1 h, b+h) - \frac{\partial f}{\partial x} (a + \mu_1 h, b) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (a + \mu_1 h, b + \mu_2 h) h$$

$$(0 < \mu_1, \mu_2 < 1)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^2}{h^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (a, b) \text{ לפי הרציפות של הנגזרות (ולכן של פונ' הרכבה).}$$

$$\text{בנוסף } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) \text{ ולכן } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^2}{h^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (a, b)$$

**מסקנה**

אם קיימות  $\frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \left( \dots \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}} \right) (x)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_{j_r}} \left( \dots \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) (x)$  והן רציפות בסביבה של  $a$  אזי הן שוות.

**הגדרה**

$$C^r(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{R} : \text{כל נגזרות מסדר } r \text{ קיימות ורציפות}\}$$

$$D^r(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{R} : \text{כל נגזרות מסדר } r \text{ קיימות}\}$$

תהי  $f \in C^r(U)$ , נגזרת מסדר  $r$ :  $D_{i_1, \dots, i_r} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_{r-1}}} \left( \dots \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right) \right)$  (לדוגמא  $\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \right)$ )

$$D_{i_1, \dots, i_r} f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left( \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right) f \quad \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \dots \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$D_{i_1, \dots, i_r} f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

## מולטי אינדקסים

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \|\alpha\|_1 \quad \text{n-מימד}$$

$$\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$$h \in \mathbb{R}^n, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : h^\alpha := h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

### הגדרה

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

## דיפרנציאל מסדר גבוה

יהי פולינום  $p(x_1, \dots, x_n) = \sum c_\alpha x^\alpha = \sum (c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})$  כאשר  $|\alpha| \leq N$

$$p(x, y, z) = 4x^2yz + 2z + x + y \quad \text{לדוגמא}$$

$$\deg(P) = \max\{|\alpha| : c_\alpha \neq 0\}$$

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha x^\alpha \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

### הגדרה

$P(\lambda x) = \lambda^m P(x)$  אם  $m$  הומוגני ממעלה

$$f(x, y, z) = x^3 + 2x^2y + 10z^3 \quad m = 3 \quad \text{לדוגמא}$$

### תרגיל

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=m} C_\alpha x^\alpha \Leftrightarrow m \text{ מסדר } P \text{ הומוגני}$$

## בינום של ניוטון מוכלל

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} a^k b^{r-k} = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = r} \frac{r!}{\alpha_1! \alpha_2!} a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}$$

### בינום מוכלל

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^r = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = r} \frac{r!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \alpha_1^{\alpha_1} \dots \alpha_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} a^\alpha$$

# הרצאה 12

$$(a_1 + \dots + a_n)^r = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} a^\alpha$$

הוכחה

$$e^{t(a_1+\dots+a_n)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a_1 + \dots + a_n)^r t^r}{r!}$$

$$e^{t(a_1+\dots+a_n)} = e^{ta_1} \dots e^{ta_n} = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{a_1^{\alpha_1} t^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \dots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \frac{a_n^{\alpha_n} t^{\alpha_n}}{\alpha_n!} = \sum_{r=0}^{\infty} \left( \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=r} \left( \frac{a_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \dots \frac{a_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!} \right) t^r \right)$$

השוואה של מקדמים:

$$\frac{(a_1 + \dots + a_n)^r}{r!} = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=r} \frac{a_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \dots \frac{a_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}$$

הערה

$$f \in C^1(U) \quad U \subset \mathbb{R}^n$$

$$a \in U : df_a(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(h) h_j = \frac{d}{dt} f(a + th)|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dt} f(a_1 + th_1, \dots, a_n + th_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + th) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a + th) h_n$$

הגדרה

$$U \subset \mathbb{R}^n; a \in U; f \in C^r(U)$$

נקבע  $h \in \mathbb{R}^n$  נגדיר

$$h \neq 0 : \varphi(t) = f(a + th)$$

$U$  – פתוחה, קיים  $\delta > 0$  כך ש  $B(a, \delta) \subset U$

$$|t| \|h\| < \delta \Rightarrow a + th \in B(a, \delta)$$

$$|t| < \frac{\delta}{\|h\|}$$

$$\varphi \in C^r(I) \quad I = \left( -\frac{\delta}{\|h\|}, \frac{\delta}{\|h\|} \right)$$

$\varphi^r(0) =: d^r f_a(h)$ $d^r f_a(h) =: \frac{d^r}{dt^r} f(a + th) _{t=0}$
--



**משפט**

$$U \subset \mathbb{R}^n; f \in C^r(U); a \in U$$

אזי

$$d^r f_a(h) = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha$$

עבור

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_n \\ \alpha! &= \alpha_1! \dots \alpha_n! \\ D^\alpha f &= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \\ h^\alpha &= h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

$d^r f_a$  פולינום הומוגני מסדר  $r$ .

**הוכחה**

$$r = 1$$

$$df_a(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$$

כלומר כאן  $\alpha = \delta_j = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \Leftarrow |\alpha| = r = 1$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = \sum_{j=1}^n \frac{1!}{1!} D^{\delta_j} f(a) h^{\delta_j}$$

בניח ש:

$$\frac{d^r}{dt^r} f(a + th)|_{t=0} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha$$

אם הדבר נכון לכל  $a$ , נחליף  $a + sh$

$$\frac{d^r}{dt^r} f(a + sh + th)|_{t=0} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a + sh) h^\alpha$$

$$\frac{d^r}{dt^r} f(a + h(s + t))|_{t=0} = \{u = t + s\} = \frac{d^r}{du^r} f(a + hu)|_{t=0} = \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha$$

$$\frac{d}{ds} : (*) \frac{d^{r+1}}{ds^{r+1}} f(a + sh) = \sum_{|\alpha|=1} \frac{r!}{\alpha!} \frac{d}{ds} D^\alpha f(a + sh) h^\alpha = \sum_{|\alpha|=1} \frac{r!}{\alpha!} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha f(a + sh) h_j \right) h^\alpha$$

בגדיר  $\delta_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

$$h_j h^\alpha = h^{\alpha + \delta_j} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} D^\alpha f = D^{\alpha + \delta_j} f$$

$$(*) = \sum_{|\alpha|=r} \sum_{j=1}^n D^{\alpha+\delta_j} f(a+sh) h^{\alpha+\delta_j}$$

נסמן  $\beta := \alpha + \delta_j$

$$|\beta| = r + 1 \Rightarrow \frac{\beta!}{\beta_j!} = \alpha_j \Rightarrow$$

$$(*) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\beta|=r+1} \frac{r! \beta_j}{\beta!} D^\beta f(a+sh) h^\beta = \sum_{|\beta|=r+1} \frac{r!}{\beta!} \sum_{j=1}^n \beta_j D^\beta f(a+sh) h^\beta$$

$$\beta_1 + \dots + \beta_n = |\beta| = r + 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^n \beta_j = r + 1$$

$$\Rightarrow (*) = \sum_{|\beta|=r+1} \frac{r!(r+1)}{\beta!} D^\beta f(a+sh) h^\beta$$

$$s = 0 \Rightarrow \frac{d^{r+1}}{ds^{r+1}} f(a+sh)|_{s=0} = \sum_{|\beta|=r+1} \frac{(r+1)!}{\beta!} D^\beta f(a) h^\beta$$

ולכן לפי אינדוקציה כדרוש.

### נוסחה סימבולית

$$d^r f_a(h) = \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^r f|_{x=a}$$

כי

$$\begin{aligned} \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^r &= \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = r} \frac{r!}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} \Rightarrow \left( h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^r f|_{x=a} \\ &= \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha \end{aligned}$$

### נוסחאות טיילור

משפט (נוסחת טיילור עם שארית בצורת לאגרנז')

$a \in U, \|h\| < \delta, B(a, \delta) \subset U, f \in C^{r+1}(U), f: U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$  יהי

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} d^k f_a(h) + \frac{1}{(r+1)!} d^{r+1} f_{a+\theta h} f(h)$$

כאשר  $0 < \theta < 1$

$$f(a+h) = P_r f(a, h) + R_r f(a, h)$$

הוכחה

נגדיר  $\varphi(t) := f(a+th)$  (ונרצה  $|t| < 1 + \epsilon$ )  $\|th\| < \delta, B(a, \delta) \subseteq U$

אם  $\|h\| < \frac{\delta}{1+\epsilon}$  אז  $a+th \in B(a, \delta) \subset U$  לכל  $t \in (-1-\epsilon, 1+\epsilon)$

נוסחת טיילור ל  $\varphi$  סביב  $t = 0$ :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{1}{1!} \varphi'(0)t + \frac{1}{2!} \varphi''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{r!} \varphi^{(r)}(0)t^r + \frac{1}{(r+1)!} \varphi(0) + \frac{1}{1!} \varphi'(0)t + \frac{1}{2!} \varphi''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{r!} \varphi^{(r)}(0)t^r + \frac{1}{(r+1)!} \varphi^{(r+1)}(\theta t)t^{r+1}$$

(זה נכון כי יש לנו נוסחאות טיילור ממשתנה 1).

ניקח  $t = 1$ :

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!} \varphi'(0) + \frac{1}{2!} \varphi''(0) + \dots + \frac{1}{r!} \varphi^{(r)} + \frac{1}{(r+1)!} \varphi(0)t^{r+1}$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k} f(a+th)|_{t=0} = d^k f_a(h)$$

$$\varphi^{(r+1)}(0) = d^k f_{a+\theta h}(h)$$

מקבלים  $\varphi(1) = f(a+h)$ ,  $\varphi(0) = f(a)$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} d^k f_a(h) + \frac{1}{(r+1)!} d f_{a+\theta h}^{r+1}(h)$$

כדרוש!

$$P_r(a, h) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha$$

ולכן  $P_r f(a, h)$  הוא סכום של פולינומים הומוגניים.

# הרצאה 13

$$f \in C^{r+1}(U)$$

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a+\theta h) h^\alpha$$

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a+\theta(x-a)) (x-a)^\alpha$$

$$r = 0$$

$$f(x) = f(a) + df_{a+\theta h}(h)$$

$$df_{a+\theta h}(h) = \langle \nabla f(a+\theta h), h \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+\theta h) h_j$$

**מסקנה – משפט על ערך ממוצע**

$$f \in C^1(U)$$

$$f(x) - f(a) = \langle \nabla f(a+\theta(x-a)), x-a \rangle$$

משפט על ערך ממוצע.

**מסקנה**

$$\text{אם } \|\nabla f(z)\| \leq M \text{ אזי } |f(x) - f(a)| \leq M \|x - a\|$$

## אומדן שארית בנוסחת טיילור

**הגדרה**

קבוצה  $U \subset \mathbb{R}^n$  קמורה אם  $[x, a] \subset U$   $\forall x, a \in U$

$$[x, a] := \{a + \theta(x-a) : 0 \leq \theta \leq 1\}$$

**משפט**

תהי  $f \in C^{r+1}(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  קבוצה קמורה,  $\forall z \in U, |D^\alpha f(z)| \leq M$ ;  $|\alpha| = r+1$ , נניח שלכל  $\alpha$ , אזי:

$$a \in U \begin{cases} |R_r f(a, x-a)| \leq \frac{M}{(r+1)!} (\sqrt{n})^{r+1} \|x-a\|_2^{r+1} \\ |R_r f(a, x-a)| \leq \frac{M}{(r+1)!} \|x-a\|_1^{r+1} \end{cases}$$

**הוכחה**

$$R_r f(a, x-a) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a+\theta(x-a)) (x-a)^\alpha$$

$$\begin{aligned}
 |R_r f(a, x - a)| &\leq \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} |D^\alpha f(a + \theta(x - a))| |(x - a)^\alpha| \leq M \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} |x_1 - a_1|^{\alpha_1} \dots |x_n - a_n|^{\alpha_n} \\
 &= \frac{M}{(r+1)!} \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{(r+1)!}{\alpha!} |x_1 - a_1|^{\alpha_1} \dots |x_n - a_n|^{\alpha_n} \stackrel{\text{בינום של גיטון}}{=} \\
 &= \frac{M}{(r+1)!} (|x_1 - a_1|^{\alpha_1} \dots |x_n - a_n|^{\alpha_n})^{r+1} = \frac{M}{(r+1)!} \|x - a\|_1^{r+1} \\
 \|x - a\|_1 &\leq \sqrt{n} \|x - a\|_2
 \end{aligned}$$

## נוסחת טיילור עם שארית בצורה Peano

### משפט

$$U \subset \mathbb{R}^n; f: U \rightarrow \mathbb{R}; f \in C^r(U), r \geq 1, a \in U$$

אזי

$$f(a + h) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha + o(\|h\|^r)_{h \rightarrow 0}$$

### הוכחה

$$f \in C^r(U) = C^{(r-1)+1}(U)$$

לפי נוסחת טיילור עם שארית Lagrange:

$$\begin{aligned}
 f(a + h) &= \sum_{|\alpha| \leq r-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha + \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a + \theta h) h^\alpha \\
 &= \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha}_{P_r f(a, h)} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a + \theta h) h^\alpha - \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha}_{\alpha(h)}
 \end{aligned}$$

$$|\alpha(h)| \leq \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} (|D^\alpha f(a + \theta h) - D^\alpha f(a)|) |h_1|^{\alpha_1} \dots |h_n|^{\alpha_n}$$

$$\frac{|\alpha(h)|}{\|h\|^r} \leq \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} (|D^\alpha f(a + \theta h) - D^\alpha f(a)|) \frac{|h_1|^{\alpha_1} \dots |h_n|^{\alpha_n}}{\|h\|_r^r}$$

$$|h_j| \leq \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2} = \|h\|_2 \Rightarrow |h_j|^{\alpha_j} \leq \|h\|_2^{\alpha_j}$$

$$|h_1|^{\alpha_1} \dots |h_n|^{\alpha_n} \leq \|h\|^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} = \|h\|^r$$

$$\frac{|h_1|^{\alpha_1} \dots |h_n|^{\alpha_n}}{\|h\|_r^r} \leq 1$$

ולכן

$$\frac{|\alpha(h)|}{\|h\|^r} \leq \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} |D^\alpha f(a + \theta h) - D^\alpha f(a)|$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} |D^\alpha f(a + \theta h) - D^\alpha f(a)| = 0 \text{ ולכן } |\alpha| = r \text{ ורציפות } D^\alpha f(x)$$

$$\alpha(h) = o(|h|^r) \text{ ולכן } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(h)}{|h|^r} = 0$$

## יחידות של פולינום טיילור

### משפט

תהי  $f \in C^r(U); U \subset \mathbb{R}^n$

בנייה כי

$$f(a + h) = P(h) + o(|h|^r)_{h \rightarrow 0}$$

$$f(a + h) = \tilde{P}(h) + o(|h|^r)_{h \rightarrow 0}$$

עבור  $P, \tilde{P}$  פולינומים,  $r \geq \max\{\deg P, \deg \tilde{P}\}$

אזי  $P = \tilde{P}$

### הוכחה

$$Q(h) := P(h) - \tilde{P}(h) = o(|h|^r)_{h \rightarrow 0}$$

$$r > \deg Q =: m$$

$$Q(h) = \sum_{|\alpha| \leq m} q_\alpha h^\alpha \quad q_\alpha \in \mathbb{R}$$

$$Q(h) = o(|h|^r)$$

$$h \mapsto th, t \in \mathbb{R}$$

$$Q(th) = \sum_{|\alpha| \leq m} q_\alpha (th)^\alpha = o(|t|^r |h|^r)_{t \rightarrow 0}$$

$$(th)^\alpha = (th_1)^{\alpha_1} \dots (th_n)^{\alpha_n} = t^{|\alpha|} h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow Q(th) = \sum_{|\alpha| \leq m} q_\alpha t^{|\alpha|} h^\alpha = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha t^{|\alpha|} h^\alpha = \sum_{k=0}^m \underbrace{\left( \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha h^\alpha \right)}_{c_k} t^k = \sum_{k=0}^m c_k t^k = o(|t|^r)_{t \rightarrow 0}, r \geq m$$

$$\sum_{k=0}^m c_k t^k = o(t^r), r \geq m$$

$$c_0 + c_1 t + \dots + c_m t^m = o(t^r)$$

$$t \rightarrow 0 : c_0 = 0$$

$$c_1 + \dots + c_m^{m-1} t^{m-1} = o(t^{r-1})$$

$$t \rightarrow 0 : c_1 = 0$$

...

$$c_m = 0$$

$$q(h) = \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha h^\alpha = 0 \quad \forall k = 0, \dots, m \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial h_1^{\beta_1} \dots \partial h_n^{\beta_n}} q(h)|_{h=0} = \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha D^\beta h^\alpha |_{h=0}$$

$$D^\beta h^\alpha = \begin{cases} 0 & \beta \neq \alpha \\ \alpha! & \beta = \alpha \end{cases}$$

וכן אם  $q(h) = 0$  נקבל:

$$D^\beta \left( \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha h^\alpha \right) |_{h=0} = 0 \Rightarrow q_\alpha \alpha! = 0 \Rightarrow q_\alpha = 0$$

$$Q = P - \tilde{P} = 0 \quad \text{ולכן}$$

### מסקנה

אם  $f \in C^r(U)$  קיים פולינום  $P$ ,  $\deg P \leq r$  כך ש  $f(a+h) = P(h) + o(\|h\|^r)$  אזי  $P$  פולינום טיילור בנקודה  $a$ .

### דוגמא

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + 2x^2y}$$

$$D^{(10,5)} f(0,0) = ?$$

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^5 (-2x^2y)^k + o(\sqrt{x^2 + y^2}^{15})$$

$$\sum_{k=0}^5 (-2x^2y)^k = \sum_{|\alpha| \leq 15} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0,0) h^\alpha \quad h = (x, y)$$

$$\alpha = (10,5) \Leftrightarrow k = 5$$

$$-2^5 = \frac{1}{10!5!} D^{(10,5)} f(0,0)$$

## נוסחת טיילור לפולינומים

### משפט

אם  $P$  פולינום  $\deg P = r$  אזי

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha P(a) (x-a)^\alpha$$

### הוכחה

$$R_r P(a, h) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha p(a + \theta h) h^\alpha = 0$$

$$|\alpha| > r \Rightarrow D^\alpha P \equiv 0$$

תרגיל

$$P(x) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = \sum_{|\beta| \leq r} c_{\beta_1, \dots, \beta_n} (x_1 - a_1)^{\beta_1} \dots (x_n - a_n)^{\beta_n}$$

$a$  מרכז.

תרגיל

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= xy + yz, \\ a &= (1, 2, 1) \quad P(x, y, z) = [(x - 1) + 1][(y - 2) + 2] + [(y - 2) + 2][(z - 1) + 1] \\ &= (y - 2)(z - 1) + 2(z - 1) + (y - 2) + 2 \end{aligned}$$



# הרצאה 14

אפשר להגיש את שתי התרגילים הבאים בעוד שבועיים, המרצה יבדוק ויתן ציון.

$$\forall r < \gamma : f \in C^r(\mathbb{R}^n) ; \forall r \geq \gamma : f \notin D^r(\mathbb{R}^n) \text{ צ"ל } f(x) = ||x||^\gamma, \gamma \in 2\mathbb{N} - 1, x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \quad f(0,0) = 0 \quad (2)$$

$$f \in D^1(\mathbb{R}^2) - C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$(a) f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$(b) f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

מכל מקרה מצא  $r$  מקסימלי כך ש  $f \in D^r(\mathbb{R}^2)$  ו  $r$  מקסימלי כך ש  $f \in C^r(\mathbb{R}^2)$

## טור טיילור

$$f \in C^{r+1}(\mathbb{R}^n)$$

$$f(x) = \sum_{|\alpha| < r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) (x - a)^\alpha + R_r f(a, x - a)$$

$$R_r f(a, x - a) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a + \theta(x - a)) (x - a)^\alpha$$

אם  $U$  קמורה אזי

$$|D^\alpha f(x)| \leq M$$

$$|R_r f| \leq \frac{M}{(r+1)!} (\sqrt{n})^{r+1} ||x - a||^{r+1}$$

## הגדרה

אומרים שפונ'  $f$  אנליטית אם לכל  $a \in U$  קיים  $\delta > 0$  כך ש

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) (x - a)^\alpha \quad x \in B_\delta(a)$$

$$A(U) = \{U - \text{קבוצת כל הפונקציות האנליטיות ב-} U\}$$

$f$  אנליטית אם  $|R_r f| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M_{r,\delta} \frac{(\sqrt{n})^{r+1}}{(r+1)!} \delta^{r+1} = 0$$

$$M_{r,\delta} := \max_{|\alpha|=r+1} \sup_{x \in B_\delta(a)} |D^\alpha f(x)|$$

**דוגמא**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

בדוק : לא אנליטית  $f, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \forall \alpha : D^\alpha f(0) = 0$

**קיצונים מקומיים**

**הגדרה**

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n ; f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

אומרים כי  $a \in \Omega$  נקודת מינימום מקומי אם קיים  $\delta > 0$  כל שלכל  $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$  מתקיים  $f(x) \geq f(a)$   
 אם מתקיים  $f(x) > f(a)$  לכל  $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$  נאמר כי  $a$  נקודת מינימום ממש.

אומרים כי  $a \in \Omega$  נקודת מקסימום מקומי אם קיים  $\delta > 0$  כל שלכל  $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$  מתקיים  $f(x) \leq f(a)$   
 אם מתקיים  $f(x) < f(a)$  לכל  $x \in \Omega \cap B_\delta(a)$  נאמר כי  $a$  נקודת מקסימום ממש.

אם  $a \in \Omega$  מקסימום או מינימום מקומי נאמר כי  $a$  נקודת קיצון מקומי.

אם  $a \in \Omega$   $\max$  או  $\min$  מקומי ממש נאמר כי היא נקודת קיצון ממש.

**דוגמאות**

(1)

$$n = 2$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

נקודת  $\min$   $a = (0,0)$  ממש.

(2)

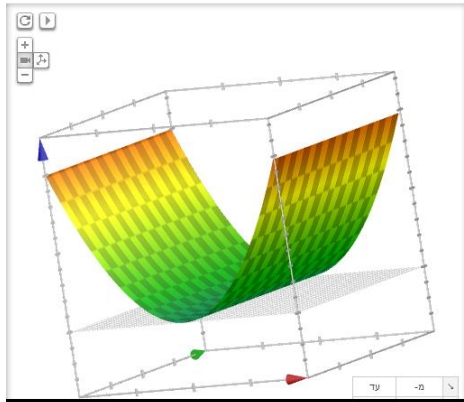
$$f(x, y) = -x^2 - y^2$$

נקודת  $\max$   $a = (0,0)$  ממש

(3)

$$f(x, y) = x^2$$

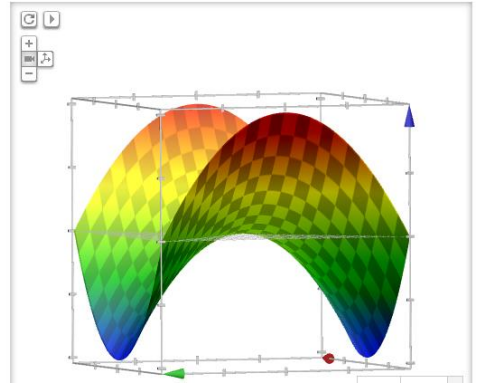
$\min a = (0,0)$  לא ממש.  $f(x, y) \geq f(0,0)$



$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad (4)$$

$$f(x, 0) > f(0, 0)$$

$$f(0, y) < f(0, 0)$$



לנקודה כזאת קוראים נקודת אוכף Saddle point

### הגדרה

אם  $f$  דיפ'  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  בנקודה  $a$  ומתקיים  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0 \forall j$  אז  $a$  נקרא נקודה קריטית ( $\nabla f(a) = 0$ )

### משפט (תנאי הכרחי לקיצון מקומי)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \Omega$ . אם  $a$  נקודת קיצון ודיפ' בנקודה  $a$  אזי  $\nabla f(a) = 0$ .

### הוכחה

$a$  נקודת  $\min$  (WLOG ב.ה.כ.)

$$\exists \delta > 0 : B(a, \delta) \subset \Omega$$

$$\forall x \in B(a, \delta) : f(x) \geq f(a)$$

ניקח  $j = 1 \dots n$  ונגדיר  $\varphi(t) := f(a + te_j)$

$$|t| < \delta : f(a) \leq f(a + te_j) = \varphi(t)$$

$t = 0$  נק' מינימום ל  $\varphi(x)$  ולכן לפי למה Fermat  $\varphi'(0) = 0$

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(a + te_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

### משמעות גאומטרית

משוואה של מישור משיק לגרף

$$T_{(a, f(a))}(\Gamma_f) : x_{n+1} - a_{n+1} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j)$$

$$a_{n+1} = f(a)$$

אם  $a$  נקודת קיצון אז  $x_{n+1} = a_{n+1} : x_{n+1} - a_{n+1} = 0$

כלומר מישור מקביל לציר  $x_{n+1}$ .

### דוגמא

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

## תנאי מספיק לקיצון מקומי

דיפרנציאל שני

$$d^2 f_a(h) := \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} f(a + th)$$

$$\frac{d}{dt} f(a_1 + th_1, \dots, a_n + th_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) h_i$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} f(a + th) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_j h_i$$

$$f \in C^2(U) : d^2 f_a(h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

## תבניות ריבועיות Quadratic Forms

הגדרה (תבנית ריבועית)

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} h_i h_j$$

אזי  $a_{ij} = a_{ji}$  כי ניתן לסדר אותם באופן הבא:

$$Q(h) = \dots a_{ij} h_i h_j + \dots + a_{ji} h_j h_i + \dots$$

$$a_{ij} h_i h_j + a_{ji} h_j h_i = \left( \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \right) h_i h_j + \left( \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} \right) h_j h_i$$

$$Q(h) = \langle Ah, h \rangle \text{ אזי}$$

הגדרה

אומרים כי תבנית ריבועית  $Q$  חיובית אם  $Q(h) \geq 0 \forall h \in \mathbb{R}^n$ . נסמן  $Q \geq 0$ 

דוגמא

$$Q(h) = h_1^2 + \dots + h_n^2 \quad A = I \quad Q(h) \geq 0$$

מסקנה

תהי  $Q(h)$ , המטריצה  $A$  של התבנית מקיימת  $A^T = A$ 

הגדרה

אומרים כי תבנית ריבועית  $Q$  חיובית ממש אם  $Q(h) > 0 \forall h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . נסמן  $Q > 0$ 

דוגמא

$$Q(h_1, h_2) = h_1^2 \quad Q \geq 0 \quad Q \neq 0$$

הגדרה

תבנית  $Q$  נקראת לא שומרת סימן (לא מוגדרת Indefinite) אם  $Q \neq 0 \wedge Q \not\geq 0$ . כלומר  $\exists h_+, h_-$  כך ש

$$Q(h_+) > 0, Q(h_-) < 0$$

**דוגמא**

$$n = 2$$

$$Q(h_1, h_2) = h_1^2 - h_2^2$$

$$Q(1,0) > 0 \quad Q(0,1) < 0$$

# הרצאה 15

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$$

$$A = A^T$$

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle$$

$$A > 0 \Leftrightarrow Q > 0$$

$$A \geq 0 \Leftrightarrow Q \geq 0$$

$$A < 0 \Leftrightarrow Q < 0$$

$$A \leq 0 \Leftrightarrow Q \leq 0$$

## מחקר לסימן של מטריצה או תבנית ריבועית

### מטריצה אורטוגונלית

$$UU^T = U^T U = I$$

$$U^T = U^{-1}$$

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^T U y \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$||Ux||^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle = ||x||^2$$

$$||Ux|| = ||x||$$

### משפט

לכל מטריצה  $A = A^T$  קיימת מטריצה אורטוגונלית  $U$  כך ש:

$$UAU^{-1} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$e_j \text{ ע"ע } \lambda_j = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$$

$$UAU^{-1}e_j = \Lambda e_j = \lambda_j e_j \Rightarrow AU^{-1}e_j = \lambda_j (U^{-1}e_j)$$

### משפט

תהי  $Q(x) = \langle Ax, x \rangle$  אזי  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ע"ע של  $A$ :

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow Q > 0$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \Leftrightarrow Q \geq 0$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0 \Leftrightarrow Q < 0$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0 \Leftrightarrow Q \leq 0$$

**הוכחה**

$$\exists U \in O(n) : UAU^{-1} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R}^r : Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle U^{-1}\Lambda Ux, x \rangle = \langle \Lambda Ux, Ux \rangle$$

$$Ux := x'$$

$$Q(x) = \langle \Lambda x', x' \rangle = \lambda_1(x'_1)^2 + \dots + \lambda_n(x'_n)^2$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x' \rangle > 0 \Leftrightarrow Q(x) > 0$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x' \rangle \geq 0 \Leftrightarrow Q(x) \geq 0$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x' \rangle < 0 \Leftrightarrow Q(x) < 0$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0 \Leftrightarrow \langle \Lambda x', x' \rangle \leq 0 \Leftrightarrow Q(x) \leq 0$$

$\det A < 0 \Leftrightarrow$  לא שומרת סימן  $A$

**Sylvester של קריטריון**

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$$

$$\Delta_k = \det(a_{ij})_{i,j=1}^k$$

אם  $A > 0$  אז  $\Delta_1, \dots, \Delta_n > 0$

אם  $(\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0 \dots)$   $A < 0$  אזי  $\forall k = 1, \dots, n : (-1)^k \Delta_k > 0$

## דיפרנציאל שני

$$d^2 f_a(h) = Q(h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

$$f \in C^2(U) ; U \subset \circ \mathbb{R}^n ; a \in U$$

### משפט

אם תבנית ריבועית  $Q > 0$  אז קיים  $C > 0$  כך שלכל  $x \in \mathbb{R}^n$  מתקיים  $Q(x) \geq C \|x\|^2$

### הוכחה

1.  $Q$  – רציפה לפי משפט Weierstrass
  2.  $\min_{\|x\|=1} Q(x) = Q(x_0), \|x_0\| = 1$
- נסמן  $C = Q(x_0) > 0$   
 ניקח  $x \in \mathbb{R}^n$ , אם  $x = 0$  אזי  $Q(0) = 0$   
 אם  $x \neq 0$  אזי  $x' := \frac{x}{\|x\|}$  כאשר  $\|x'\| = 1$  ולכן  $Q(x') \geq Q(x_0) = C$   
 $Q(x) \geq C \|x\|^2$  ולכן  $\frac{Q(x)}{\|x\|^2} = Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq C$

### עוד הוכחה

$$UAU^{-1} = \Lambda$$

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle U^{-1} \Lambda Ux, x \rangle = \langle \Lambda Ux, Ux \rangle = \{x' = Ux\} = \langle \Lambda x', x' \rangle = \lambda_1 (x'_1)^2 + \dots + \lambda_n (x'_n)^2$$

$$\geq \lambda_{\min} \|x'\|^2 = \lambda_{\min} \|x\|^2$$

$$Q > 0 \Rightarrow C := \lambda_{\min} > 0$$

$$Q(x) \geq C \|x\|^2$$

### משפט

תהי פונ'  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$   $U \subset \circ \mathbb{R}^n$   $f \in C^2(U)$

תהי  $a \in U$  נקודה קריטית, כלומר  $\nabla f(a) = 0$

1. אם  $d^2 f_a > 0$  אז  $a$  נקודת מינימום מקומי ממש.
2. אם  $d^2 f_a < 0$  אז  $a$  נקודת מקסימום מקומי ממש.
3. אם  $d^2 f_a$  לא מוגדרת סימן אז  $a$  לא נקודת קיצון.

### הוכחה

$$1. Q := d^2 f_a > 0$$

לפי המשפט הקודם קיים  $C > 0$  כך ש  $\forall h \in \mathbb{R}^n: Q(h) \geq C \|h\|^2$

נוסחת טיילור מסדר 2 סביב נקודה  $a$ :

$$f(x) = f(a) + df_a(x-a) + \frac{1}{2} d^2 f_a(x-a) + \epsilon(x-a) \|x-a\|^2$$

$$df_a(x-a) = \langle \nabla f(a), x-a \rangle = 0$$



$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{1}{2} d^2 f_a(x-a) + \epsilon(x-a) \|x-a\|^2 = \frac{1}{2} Q(x-a) + \epsilon(x-a) \|x-a\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} C \|x-a\|^2 + \epsilon(x-a) \|x-a\|^2 \end{aligned}$$

$$f(x) - f(a) \geq \|x-a\|^2 \left( \frac{1}{2} C + \epsilon(x-a) \right)$$

$$\exists \delta > 0 : \|x-a\| < \delta \Rightarrow |\epsilon(x-a)| < \frac{1}{4} C$$

לכל  $x$  בתחום מתקיים:

$$\|x-a\| < \delta \Rightarrow f(x) - f(a) \geq \frac{1}{4} C \|x-a\| \underset{x \neq a}{>} 0$$

$$\forall x \in U \cap B_\delta(a), x \neq a : f(x) - f(a) > 0$$

ולכן  $a$  נק' מינימום ממש.

2. נחליף  $f$  ל  $-f$ .

3. נניח כי  $Q$  לא שומרת סימן.

$$\exists h_+ \in \mathbb{R}^n : Q(h_+) > 0$$

$$\exists h_- \in \mathbb{R}^n : Q(h_-) < 0$$

$$f(a + th_\pm) = f(a) + df_a(th_\pm) + \frac{1}{2} d^2 f_a(th_\pm) + \epsilon(th_\pm) \|th_\pm\|^2$$

$$\begin{aligned} f(a + th_\pm) - f(a) &= \frac{1}{2} Q(th_\pm) + \epsilon(th_\pm) \|th_\pm\|^2 = \frac{1}{2} t^2 Q(h_\pm) + |t|^2 \epsilon(th_\pm) \|h_\pm\|^2 = \\ &= t^2 \left( \frac{1}{2} Q(h_\pm) + \epsilon(th_\pm) \|h_\pm\|^2 \right) \end{aligned}$$

$$Q(h_+) > 0 \quad .a$$

$$\exists \delta > 0 : |t| < \delta \Rightarrow \left| \epsilon(th_\pm) \|h_\pm\|^2 \right| < \frac{1}{4} Q(h_+)$$

$$f(a + th_+) - f(a) \underset{t \neq 0}{>} 0 \text{ אזי } |t| < \delta$$

$$Q(h_-) < 0 \quad .b$$

$$\exists \delta' > 0 : \left| \epsilon(th_-) \|h_-\|^2 \right| < \frac{1}{4} |Q(h_-)| \Rightarrow \frac{1}{2} Q(h_-) + \epsilon(th_-) \|h_-\|^2 < 0$$

$$f(a + th_-) - f(a) < 0$$

ולכן  $a$  לא נקודת קיצון.

### משמעות גאומטרית

$$f(x) = f(a) + \sum \lambda_j (x_j - a_j)^2 + o(\|x-a\|^2)$$

$\lambda_j > 0$  אז עבור  $x_j, a$  היא נקודת מינימום.

$\lambda_j < 0$  אז עבור  $x_j, a$  היא נקודת מקסימום.

### דוגמא

$f(x, y) = f(a) + \lambda x^2 + \mu y^2 + o(x^2 + y^2)$ ;  $\lambda * \mu > 0$  יש קיצון.

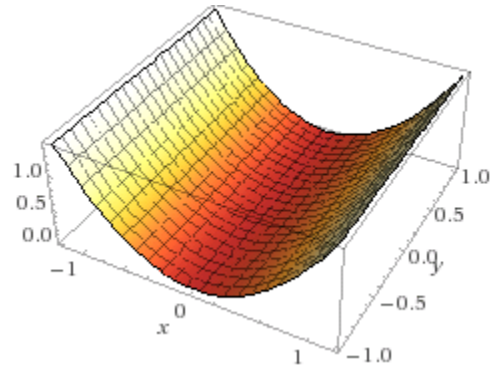
$\lambda * \mu < 0$  אז אין קיצון (אוכף).

**דוגמא**

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n$$

אי אפשר להחליט  $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$   $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n = 0$

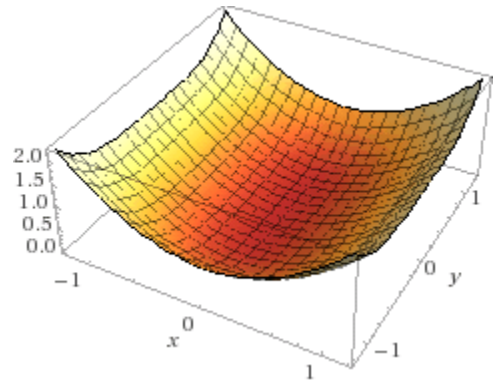
$$f(x, y) = x^2$$



$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$$

נקודת מינימום לא ממש.

$$f(x, y) = x^2 + \epsilon y^4$$

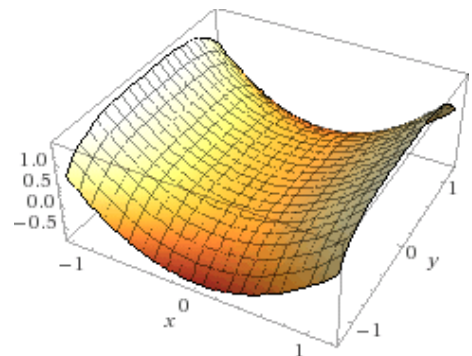


(0,0) מינימום ממש.

$$f(x, y) = x^2 - \epsilon y^4$$

$$f(x, 0) > 0 \quad x \neq 0$$

$$f(0, y) < 0 \quad y \neq 0$$



(0,0) אוכף.

## מחקר לקיצון

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

(1) נקודות קריטיות

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0 \end{cases}$$

$a$  נקודה קריטית.

$$n = 2$$

$$f'_x(a) = f'_y(a) = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} f'_{xx} & f'_{xy} \\ f'_{yx} & f'_{yy} \end{pmatrix}$$

$\det H < 0 \Rightarrow a$  נקודת אוכף

### דוגמא

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

$$y^4 - y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0,0), (1,1)$$

נקודות קריטיות:  $a = (0,0), b = (1,1)$

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x - 3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H = -2 < 0$$

(0,0) נקודת אוכף.

$$H_f(b) = \begin{pmatrix} 6 - 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 6 > 0$$

$$\Delta_2 = 36 - 9 > 0$$

$d^2 f_b > 0$  ולכן  $b$  נקודת מינימום מקומי.

# הרצאה 16

## פונקציה סתומה Implicit Function

$$ax + by = 0$$

$$F(x, y) := ax + by = 0$$

$$y = -\frac{a}{b}x =: \varphi(x) ; b \neq 0$$

$$ax = 0 ; b = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = b$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

### סימון

נסמן:

$$\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

$$(x, y) \in \begin{matrix} x \in & y \in \end{matrix}$$

### משפט

תהי  $W \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  נתונה.  $F: W \rightarrow \mathbb{R}; F \in C^r(W)$ .

נתונה הנקודה  $(a, b) \in W$  כך ש  $F(a, b) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

אזי קיימות סביבות  $U$  ו  $V$  של  $a$  ו  $b$  בהתאמה

קיים ויחיד

$$\forall x \in U \exists! y \in V F(x, y) = 0$$

נסמן  $\varphi: U \rightarrow V$  ו  $\varphi \in C^r(U)$  ו  $y = \varphi(x)$

### הוכחה

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 ; \text{ WLOG } \frac{\partial F}{\partial y} > 0$$

רציפה ב  $(a, b)$  ולכן  $-\frac{\partial F}{\partial y}$

$$\exists B_{(a,b)}(\epsilon) : \forall (x, y) \in B_{(a,b)}(\epsilon) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$$

סביבות  $U' \times V' \subset B_{(a,b)}(\epsilon)$  ש  $\exists U' \ni a, V' \ni b$

בפרט  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, y) > 0$  כלומר  $\nearrow F(a, y)$  ממש (לפי  $y$ ).

$$V' = (b - \epsilon, b + \epsilon)$$

$$y = b : F(a, b) = 0$$

$$y = b + \epsilon : F(a, b + \epsilon) > 0$$

$$y = b - \epsilon : F(a, b - \epsilon) < 0$$

$$\exists U'' \ni a : F(x, b + \epsilon) > 0 \forall x \in U'' \text{ ולכן רציפה ולכן } F(x, b + \epsilon)$$

$$\exists U''' \ni a : F(x, b - \epsilon) < 0 \forall x \in U''' \text{ ולכן רציפה ולכן } F(x, b - \epsilon)$$

נגדיר

$$U := U' \cap U'' \cap U'''$$

נקבע  $x \in U$ 

$$F(x, b - \epsilon) < 0, F(x, b + \epsilon) > 0 \text{ לפי הבניה}$$

$F(x, y) - F(x, y)$  רציפה לפי  $x$  אם  $x$  קבוע.

$$\exists y : F(x, y) = 0 \text{ ולכן לפי משפט קושי על ערך בינוני } F(x, b - \epsilon) < 0, F(x, b + \epsilon) > 0$$

אבל  $F(x, *) \nearrow$  ולכן  $y$  הוא יחיד.

$$y \in (b - \epsilon, b + \epsilon) = V ; y = \varphi(x), x \in U$$

(1) צ"ל רציפה בנקודה  $(a, b)$ , כלומר צ"ל:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(a, \delta) \subset U : \varphi(x) \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$$

ניקח  $U \times (b - \epsilon, b + \epsilon) \subset U'$  ולפי הבנייה

$$x \in U' \Rightarrow y \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$$

$$U' = B(a, \delta)$$

$$y = \varphi(x)$$

$$\forall x \in B(a, \delta) \Rightarrow \varphi(x) \in (\varphi(a) - \epsilon, \varphi(a) + \epsilon)$$

ולכן  $\varphi$  רציפה.

$$\varphi \in C^r(U) \quad (2)$$

נכתוב נוסחת טיילור ל  $F$  בנקודה  $(a, b)$  עם סדר 0 עם שארית *Lagrange*.

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = F(a, b) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)(x_j - a_j) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(y - b)$$

$$\xi = (a, b) + \theta((x, y) - (a, b)) ; 0 < \theta < 1 \text{ עבור}$$

$$y = \varphi(x); b = \varphi(a)$$

$$F(a, b) = 0$$

$$x \in U \ni a ; F(x, \varphi(x)) = 0$$

$$0 = 0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\xi)(x_j - a_j) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(\varphi(x) - \varphi(a))$$

$$x = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi)(x_k - a_k) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi)(\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a))$$

$$\frac{\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a_1, \dots, a_n)}{x_k - a_k} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x), \frac{\partial F}{\partial y}(\xi) \neq 0 \quad \forall |x - a| < \delta$$

$$x \rightarrow a \Rightarrow \varphi(x) \rightarrow b = \varphi(a)$$

$$(x, \varphi(x)) - (a, b) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

ולכן  $\xi \xrightarrow{x \rightarrow a} (a, b)$

$$\frac{\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a_1, \dots, a_n)}{x_k - a_k} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a + \theta(x - a), b + \theta(\varphi(x) - b))}{\frac{\partial F}{\partial y}(a + \theta(x - a), b + \theta(\varphi(x) - b))}$$

$$\lim_{x_k \rightarrow a_k} \frac{\varphi(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n) - \varphi(a_1, \dots, a_n)}{x_k - a_k} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

$$\exists \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(a) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0 \quad \forall x \in U_a, y \in V_b$$

אז לכן אפשר להחליף  $(x, \varphi(x))$  ל  $(a, b)$

ולכן

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}}_{k=1, \dots, n}$$

$\varphi \in C^r(U)$ ?

$\frac{\partial F}{\partial x_j}, \varphi$  רציפות ולכן  $-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$  רציפה ב  $U$

ולכן  $\varphi \in C^1(U)$  רציפות ולכן  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)$ ;  $x \in U, k = 1, \dots, n$

נניח כי  $\varphi \in C^k(U)$  :  $k < r$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \frac{\partial F}{\partial y}, \varphi \in C^k(U) \Rightarrow - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \in C^k(U)$$

ולכן

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \in C^k(U) \quad k = 1, \dots, n \Rightarrow \varphi \in C^{k+1}(U)$$

ולכן לפי אינדוקציה  $\varphi \in C^r(U)$

### גזירות של פונקציה סתומה

$$F(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} : \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$$

### אלגוריתם:

$$F(a, b) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 \quad (2)$$

↓

$$y = \varphi(x), x \in U_a$$

### תרגיל

$$z^3 - xz + y = 0$$

$$x = 3, y = -2, z = z(x, y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(3, -2) = ? \quad (2)$$

$$F(x, y, z) = z^3 - xz + y = 0 \quad (1)$$

$$F(3, -2, 2) = 8 - 6 - 2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - x \Big|_{\substack{x=3 \\ y=-2 \\ z=2}} = 3 * 4 - 3 = 9 \neq 0 \quad (2)$$

ולכן קיימת פונקציה יחידה  $z = z(x, y) \in C^\infty(U \times V)$

$$(3, -2) \in U; v = (2 - \epsilon, 2 + \epsilon); z(3, -2) = 2$$

$$z(x, y)^3 - xz(x, y) + y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} : 3z^2 z'_x - z - xz'_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} : 3z^2 z'_y - xz'_y + 1 = 0$$

$$3 * 4 * z'_x(3, -2) - 2 - 3z'_x(3, -2) = 0 \Rightarrow z'_x(3, -2) = \frac{2}{9}$$

$$3 * 4 * z'_y(3, -2) - 3z'_y(3, -2) + 1 = 0 \Rightarrow z'_y(3, -2) = -\frac{1}{9}$$

# הרצאה 17

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

## מקרה לינארי

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}y_1 + \dots + b_{1m}y_m = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + b_{m1}y_1 + \dots + b_{mm}y_m = 0 \end{cases} \Rightarrow j = 1 \dots m: y_j = \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

$$\det(b_{ij})_{i,j=1}^m \neq 0$$

## משפט על פונ' סתומה כללית

### משפט

$$\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \Rightarrow x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$

תהי  $F: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R}^m; F \in C^r(\mathbb{W}), r \geq 1$

(1) תהי  $(a, b) \in \mathbb{W}$  כך ש  $F(a, b) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a, b) \end{pmatrix} \neq 0$$

(2) נניח כי

אזי קיימות סביבות  $U \ni a, V \ni b$  כך ש  $F(x, y) = 0$  הפונקציה  $y := \varphi(x), x \in U; \varphi \in C^r(U)$

### הסבר

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{W} : F(x, y) = 0\}$$

$$\det \left( \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b) \right)_{i,j=1}^m \neq 0$$

אזי  $\exists U, V$  כך ש  $M \cap (U \times V)$  גרף של  $y = \varphi(x)$

לדוגמא עבור  $m = 1$

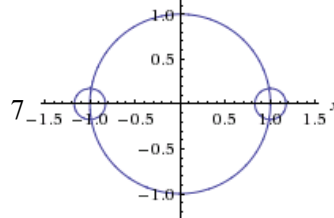
$$F(x, y) = xy = 0$$

$$x = a \neq 0 \Rightarrow y = 0; \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x$$

כלומר המשפט לא מתקיים עבור  $x = 0$ .

או לדוגמא  $F(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$

בחיתוך עם צירים אין גרף אפשרי כי לא יודעים האם לשייך לפונקציה העליונה או התחתונה,  $\frac{\partial F}{\partial y}(\pm 1, 0) = 0$





**סימון**  
*Jacobian*

Jacobian –  $\det J_f(x); f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) := \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n = \det J_f(x)$$

ניתן לרשום את תנאי 2 כך:

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(a, b) \neq 0 \quad (2)$$

**הוכחה של המשפט**  
אינדוקציה לגבי  $m$

$m = 1$  הוכחנו, נניח כי המשפט נכון עבור  $m - 1$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a, b) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a, b) \end{pmatrix} \neq 0$$

WLOG :  $\Delta_{m-1} \neq 0$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}(a, b) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}}(a, b) \end{pmatrix} \neq 0$$

מערכת:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, \overline{y_1, \dots, y_{m-1}}, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_{m-1}(x_1, \dots, x_n, \overline{y_1, \dots, y_{m-1}}, y_m) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_{m-1})}{\partial(y_1, \dots, y_{m-1})}(a, b) \neq 0$$

לפי הנחה של אינדוקציה

$\exists U \ni (a, b_m), V \ni (b_1, \dots, b_{m-1})$

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n, y_m) \\ \vdots \\ y_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1, \dots, x_n, y_m) \end{cases}$$

$(x, y_m) \in U, y' := (y_1, \dots, y_{m-1}) \in V$

$\varphi_j \in C^r(U)$

$F_j(x, \varphi_1(x, y_m), \dots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m) = 0; 1 \leq j \leq m - 1 ; (x, y_m) \in U$

$$\frac{\partial}{\partial y_m} : (*) \quad \boxed{\frac{\partial F_j}{\partial y_1}(a, b) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}(a, b_m) + \dots + \frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}}(a, b) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m}(a, b_m) + \frac{\partial F_j}{\partial y_m}(a, b) = 0}$$

נתבונן במשוואה

$$G(x, y_m) = F_m(x, \varphi_1(x, y_m), \dots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m)$$

$G = 0$  משוואה!

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$0 = F_m(a, b) = F_m(a, \varphi_1(a, b_m), \dots, \varphi_{m-1}(a, b_m), b_m) = F(a, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m) = G(a, b_m) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_m}(a, b_m) \stackrel{?}{\neq} 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_m}(a, b_m) = 0 \text{ נניח כי}$$

$$(**) \quad 0 = \frac{\partial G}{\partial y_m}(a, b_m) = \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a, b) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}(a, b_m) + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}(a, b) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m}(a, b_m)$$

בצורה וקטורית, לפי (\*\*), (\*):

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}(a, b) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m}(a, b_m) + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_{m-1}}(a, b) \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m}(a, b_m) + \frac{\partial F}{\partial y_m}(a, b) \stackrel{\text{מקדם}=1}{=} 0 \Rightarrow \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} = 0 \text{ - סתירה}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_m}(a, b_m) \neq 0$$

$$G(a, b_m) = 0 \text{ לפי משפט למקרה } m = 1$$

$$F_m(x, \varphi_1(x, y_m), \dots, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m) = 0 = G(x, y_m) \Rightarrow y_m = \varphi_m(x) : x \in U_a, y \in V_b$$

$$\exists U'_a, V'_b : \begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n, y_m) = \varphi_1(x_1, \dots, x_n, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) \\ \vdots \\ y_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1, \dots, x_n, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) \\ y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

בסביבה  $U'_a \times V'_b \ni (a, b)$

$$\Psi(x) : \begin{cases} y_1 = \Psi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_{m-1} = \Psi_{m-1}(x_1, \dots, x_n) \\ y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \Rightarrow y = \Psi(x) : (x, y) \in U'_a \times V'_b$$

### תרגילים

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases} \quad (1)$$

הוכח כי  $u, v \in C^\infty$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ ,  $u, v \in C^\infty$

$$(x, y) \in U_{(1,2)} ; (u, v) \in V_{(0,0)} ; a = (1,2) \quad b = (0,0)$$

$$\begin{cases} 1e^{0+0} + 2 * 0 * 0 = 0 \\ 2e^{0-0} - \frac{0}{1+0} = 2 \end{cases} \Rightarrow F(a, b) = 0 \quad (\text{א})$$

$$\frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (x_1, x_2)}(1,2,0,0) = \det \begin{pmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{pmatrix} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2 \\ u=0 \\ v=0}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad (\text{ב})$$

אין פתרון אנליטי אבל יש פתרון.

מה אם הנגזרות?

לפי המשפט הכללי  $F(x, y) = 0, y = \varphi(x) \Rightarrow F(x, \varphi(x)) \equiv 0 \quad x \in U_a$

**כלל שרשרת:**

$$\begin{aligned} dF_x(x, \varphi(x)) + dF_y(x, \varphi(x)) \circ d\varphi_x(x) &\equiv 0 \\ d\varphi_x(x) &= -[dF_y(x, \varphi(x))]^{-1} \circ dF_x(x, \varphi(x)) \\ J_\varphi(x) &= -[JF_y(x, \varphi(x))]^{-1} JF_x(x, \varphi(x)) \\ J_\varphi(a) &= -[JF_y(a, b)]^{-1} JF_x(a, b) \end{aligned}$$

ובתרגיל שלנו:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} : e^{u+v} + xe^{u+v}(u'_x + v'_x) + 2(u'_x v + uv'_x) &= 0 \\ ye^{u-v}(u'_x - v'_x) - (u' \frac{1}{1+v} + u \frac{-v'_x}{(1+v)^2}) &= 2 \\ u'_x(1,2) = ? \Rightarrow 1 + (u'_x + v'_x) &= 0 \\ 2(u'_x - v'_x) - u'_x = 0 \Rightarrow v'_x(1,2) = -1, u'_x(1,2) &= 0 \end{aligned}$$

# הרצאה 18

## משפט על פונקציה הפוכה Inverse Function

$$\begin{aligned} n &= 1 \\ f: (a, b) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\in C^1(a, b) \\ f'(x) &\neq 0 \end{aligned}$$

### הגדרה

$$U, V \subset \circ \mathbb{R}^n$$

אומרים כי  $\varphi: U \rightarrow V$  דיפאומורפיזם אם:

- (1)  $\varphi$  חח"ע "1-1"
- (2)  $\varphi(U) = V$  על  $\varphi$
- (3)  $\varphi \in C^r(V), \varphi^{-1} \in C^r(U)$

אומרים כי  $U, V$  דיפאומורפים אם קיים  $C^r$ -דיפאול' ביניהם.

### הגדרה

$F, G \subset \mathbb{R}^n$  דיפאומורפים אם לכל  $U, V \subset \circ \mathbb{R}^n$  כך  $U, G \subset V, U_0 \subset U, F \subset U, G \subset V$  קיימות  $V_0 \subset \circ V, U_0 \subset \circ U$  כך ש  $V_0 \sim U_0$  ( $F \subset U_0, G \subset V_0$ ).

### משפט (על פונ' הפיכה)

$$U, V \subset \circ \mathbb{R}^n, f: U \rightarrow V, f \in C^r(U), r \geq 1, a \in U$$

נניח כי  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) \neq 0$  או קיימות סביבות  $a \in U_0, f(a) = b \in V_0$  כך ש:

$$\begin{aligned} \forall y \in V_0 \exists! x \in U_0; x = \varphi(y) = f^{-1}(y) \\ f^{-1} \in C^r(V_0), f^{-1}: V_0 \rightarrow U_0 \end{aligned}$$

### הוכחה

$$\begin{aligned} W &:= U \times V \\ F(x, y) &:= y - f(x) \\ F: W &\rightarrow \mathbb{R}^n; F \in C^r(W) \\ F(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a, b) &= -\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) \neq 0 \end{aligned}$$

לפי משפט על פונ' סתומה:

$$\begin{aligned} \exists U_0, V_0 \subset \circ \mathbb{R}^n: \forall y \in V_0 \exists! x \in U_0: y - f(x) = F(x, y) = 0 \\ y \rightarrow x = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1} \in C^r(V_0) \end{aligned}$$

**מסקנה 1:**

$$f \in C^r(U); U \subset \mathbb{R}^n; a \in U$$

$$\mathbb{R}^n \text{ קבוצה פתוחה ב-} \mathbb{R}^n \text{ אזי } \forall x \in U \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) \neq 0$$

**הוכחה**

$$\text{ניקח } \exists x_0 \in U : f(x_0) = y_0 \text{ אזי } y_0 \in f(U)$$

לפי משפט על פונ' הפיכה:  $\exists x_0 \in U_0 \subset U, y_0 \in V_0 \subset \mathbb{R}^n$  כך שלכל  $y \in V_0$  קיים ויחיד

$$x \in U_0 \subset U : f(x) = y$$

קיבלנו  $V_0 \subset f(U) \exists V_0 \subset \mathbb{R}^n : V_0 \subset f(U)$  ולכן  $f(U)$  קבוצה פתוחה

**מסקנה 2:**

אם  $f: U \rightarrow V$  דיפאומורפיזם מקומי, כלומר לכל  $a \in U, b \in V$  קיימות סביבות  $U_a, V_b$  כך ש  $f: U_a \rightarrow V_b$  היא  $C^r$ -דיפאומורפיזם.

**דוגמא**

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) \neq 0 \Rightarrow f \text{ דיפאומורפיזם}$$

$$f(x_1, x_2) = (e^{x_1} \cos x_2, e^{x_1} \sin x_1)$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = e^{2x_1} \neq 0$$

$$f(x_1, x_2 + k\tau) = f(x_1, x_2 + 2k\pi) = f(x_1, x_2)$$

**מטריצת יעקובי על פונ' הפוכה**

$$f: U \rightarrow V$$

$$f \in C^r(U); U, V \subset \mathbb{R}^n$$

$$a \in U, b = f(a); \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a) \neq 0$$

$$\exists f^{-1}: V_b \rightarrow U_a; f^{-1}(f(x)) = x \in U_a$$

**כלל השרשרת**

$$J_{f^{-1}}(f(a)) J_f(a) = I$$

$$J_{f^{-1}}(b) = (J_f(a))^{-1}$$

$$d_{f^{-1}}(f(a)) \circ df(a) = I$$

$$df_b^{-1} = (df_a)^{-1}$$

$$\frac{\partial(f_1^{-1}, \dots, f_n^{-1})}{\partial(y_1, \dots, y_n)}(b) = \frac{1}{\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a)}$$

**משפט**

$$U \subset \circ \mathbb{R}^n ; f: U \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C^r(U), r \geq 1$$

נניח כי  $\forall x \in U \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) \neq 0$

אז  $f(U)$  קבוצה פתוחה

אם  $f$  חז"ע אז  $f: U \rightarrow f(U)$   $C^r$ -דיפאז'י

**תרגיל בסגנון מבחן**

$$f_1(x, y, z) = e^{2y} + e^{2z}$$

$$f_2(x, y, z) = e^{2x} - e^{2z}$$

$$f_3(x, y, z) = x - y$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

(1) יעקוביאן:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2e^{2y} & 2e^{2z} \\ 2e^{2x} & 0 & -2e^{2z} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -4e^{2y+2z} - 4e^{2x+2z} < 0$$

(2)  $f(x, y, z) = f(x', y', z')$

$$\begin{cases} e^{2y} + e^{2z} = e^{2y'} + e^{2z'} \\ e^{2x} - e^{2z} = e^{2x'} - e^{2z'} \\ x - y = x' - y' \end{cases}$$

$$e^{2x} + e^{2y} = e^{2x'} + e^{2y'} \Rightarrow e^{2y}(e^{2x-2y} + 1) = e^{2y'}(e^{2x'-2y'} + 1) \Rightarrow y = y' \Rightarrow$$

$$x = x', z = z'$$

## משטחים דיפרנציאליים ב- $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^2 \text{ קו } ax + by - c = 0$$

$$\text{rank}(a_{ij}) = 2 \text{ אם } \mathbb{R}^3 \text{ קו } \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \end{cases}$$

### הגדרה

$$\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m; U \subset \mathbb{R}^n; m \leq n$$

$$\text{rank} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^{m,n} = m \text{ אם } a \in U \text{ אומרים כי } \Phi \text{ רגולרית בנקודה } a \text{ (מקסימלי!).}$$

$a$  נקודה רגולרית.

### הגדרה

$$W \subset \mathbb{R}^n; F: W \rightarrow \mathbb{R}^m, m \leq n, F \in C^r(W)$$

הקבוצה  $M = \{x \in W : F(x) = 0\}$   $C^r$ -משטח אם כל נקודה ב- $M$  רגולרית או אם  $F$  רגולרית ב- $W$

$$\dim M = n - m$$

$m = 1$  משטח על Hyperspace.

### דוגמאות

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\} = S^2$$

$$W = \mathbb{R}^3, F \in C^\infty(W)$$

$$J_F(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

אם  $\text{rank} J_F(x, y, z) = 0$  אזי  $x = y = z = 0$  אבל  $(x, y, z) \notin S^2$  ולכן  $S^2$ - $C^\infty$ -משטח.  $\dim S^2 = 2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x + y + z = 0$$

$$J_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } J_F < 2 \Rightarrow (2x, 2y, 2z) = \lambda(1, 1, 1) \Rightarrow x = y = z = \frac{\lambda}{2}$$

$$x + y + z = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \notin M$$

$$\dim M = 3 - 2 = 1$$

## הרצאה 19

### הגדרה

יהיו  $F, G \subset \mathbb{R}^n$ .  $F \sim G$  דיפאומורפי אם קיימות  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  כך ש  $F \subset U, G \subset V$  כך שקיים  $\varphi : U \rightarrow V$  שהוא דיפאומורפיזם.

### דוגמא

טורוס ב  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_3^2 + x_4^2 = 1 \end{cases}$$

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix}$$

### מישור משיק למשטח

$M$  משטח,  $W \subseteq \mathbb{R}^n$   
 $M = \{x \in W : \Phi_1(x) = \dots = \Phi_m(x) = 0\}$   
 $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$  רגולרית ב  $M$ .  
 $\Phi \in C^r(W)$ ,  $r \geq 0$  וקוראים ל  $M$   $C^r$ -משטח.  
 $\dim M = k = n - m$

נקבע  $a \in M$

$\Phi$  רגולרית ב  $a$ , כלומר:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} (a) & \dots & (a) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ (a) & \dots & (a) \end{pmatrix} = m$$

ולכן קיים מינור  $\Delta_{m \times m} \neq 0$

לפי משפט על פול' סתומה:

$$a = \left( \underbrace{a_1, \dots, a_k}_{a'}, \underbrace{a_{k+1}, \dots, a_n}_{a''} \right) = (a', a'')$$

$$\exists U_{a'}, V_{a''} : \forall x' \in U_{a'} \exists! x'' \in V_{a''} : \Phi(x', x'') = 0$$

$$x'' = \varphi(x')$$

$$(x_{k+1}, \dots, x_n) \in V_{a''}, (x_1, \dots, x_k) \in U_{a'} \text{ ש } (x_{k+1}, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_k)$$

$$m = 1$$

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0, a = \left( \underbrace{a_1, \dots, a_{n-1}}_{a'}, \underbrace{a_n}_{a''} \right)$$

$$\nabla \varphi(a) \neq 0 \text{ רגולרית, } \nabla \varphi(a) = ((a), \dots, (a)) \neq (0, 0) \text{ כי } (a) \neq 0, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n$$

### מישור משיק לגרף $\Gamma_\varphi$

$$\Gamma_\varphi = M \cap (U_{a'} \times V_{a''})$$

### מישור משיק בנקודה $a$ :

$$x_n - a_n = \sum_{j=1}^{n-1} (a') (x_j - a_j)$$

$$\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})) \equiv 0$$

$$(a) + (a) (a') = 0$$

$$\left\langle (a') = -\frac{(a)}{(a)} \right\rangle \leftarrow$$



$$\Gamma_\varphi : x_n - a_n = \sum_{j=1}^{n-1} \left( -\frac{(a)}{(a)} \right) (x_j - a_j) \Rightarrow (a) (x_n - a_n) = - \sum_{j=1}^{n-1} (a) (x_j - a_j)$$

$$T_a(M) \text{ משוואה של מישור משיק } \sum_{j=1}^n (a) (x_j - a_j) = 0$$

**גרף**

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n, \quad x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$1 \leq j \leq n-1 : \quad (x) = (x)$$

$$j = n : \quad (x) = -1$$

$$\Phi = f(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1} (x_j - a_j) - (x_n - a_n) = 0$$

**משמעות גאומטרית**

$$T_a(M) : \langle \Phi(a), x - a \rangle = 0$$

$$T_a(M) : \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \Phi(a), x - a \rangle = 0\}$$

**דוגמאות**

.1

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$$\nabla \Phi = (x, 2y)$$

$$r > 0$$

יהי  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  כך ש  $a_1^2 + a_2^2 = r^2$

$$T_a(a) : 2a_1(x - a_1) + 2a_2(y - a_2) = 0 \Leftrightarrow \nabla \Phi(a) = (2a_1, 2a_2)$$

$$T_a(M) : a_1x + a_2y = r^2$$

.2  $u = (x, y, z)$  ספירה  $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

$$a \in S^2, \langle \nabla \Phi(a), u - a \rangle = 0$$

$$2a_1(x - a_1) + 2a_2(y - a_2) + 2a_3(z - a_3) = 0$$

$$a_1x + a_2y + a_3z = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

$$T_a(S^2) : a_1x + a_2y + a_3z = 0 \Leftarrow$$

**m - משוואות**

$$M = \{x \in W : \Phi_1(x) = \dots = \Phi_m(x) = 0\}$$

$a \in M$  רגולרית בנקודה  $\Phi \Leftarrow \nabla \Phi_1(a), \dots, \nabla \Phi_m(a)$  בפרט,  $\nabla \Phi_j(a) \neq 0$  ולכן

$$M = \bigcap_{j=1}^m \{x : \Phi_j(x) = 0\}$$

$$\dim M = n - m = k$$

$$T_a(M) = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 \leq j \leq m : \langle \nabla \Phi_j(a), x - a \rangle = 0\} = \bigcap_{j=1}^m T_a(M_j)$$

**סה"כ קיבלנו:**

$$M = \{x \in W : \Phi_1(x) = \dots = \Phi_m(x) = 0\}$$

$$\dim M = n - m, m \leq n, \Phi \in C^r(W), r \geq 1$$

$$T_a(M) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists i : \sum_{j=1}^n (a_j) (x_j - a_j) = 0 \right\}$$

$$\dim T_a(M) = n - m = \dim M$$

$$T_a(M) : \langle \nabla \Phi_j(a), x - a \rangle = 0 \Rightarrow (x - a) \perp \nabla \Phi_1(a), \dots, \nabla \Phi_m(a)$$

$$N_a(M) = \text{span} \{ \nabla \Phi_1(a), \dots, \nabla \Phi_m(a) \}$$

$$N_a(M) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x - a = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla \Phi_j(a) \right\}$$

(האם  $M_a \oplus T_a = \mathbb{R}^n$  ?)

**דוגמא**

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$x_3^2 + x_4^2 = 1$$

$a = (a_1, \dots, a_4)$ , טורוס,  $M = T^2$

$$T_a(M) : \begin{cases} 2a_1(x_1 - a_1) + 2a_2(x_2 - a_2) = 0 \\ 2a_3(x_3 - a_3) + 2a_4(x_4 - a_4) = 0 \end{cases} : \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = 1 \\ a_3x_3 + a_4x_4 = 1 \end{cases}$$

**קיצונים על תנאי (עם אילוצים)**

**הגדרה**

יהיה  $M$  משטח  $C^r$ -משטח ב- $\mathbb{R}^n$ ,  $M = \{x \in W : \Phi(x) = 0\}$   $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  
 תהי פונ'  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

- אומרים ש  $a \in M$  נקודת מינימום אם  $\exists \epsilon > 0 : \forall x \in M \cap B(a, \epsilon) : f(x) \geq f(a)$
- אומרים ש  $a \in M$  מינימום ממש אם  $\exists \epsilon > 0 : \forall x \in M \cap B(a, \epsilon) : f(x) > f(a)$   $x \neq a$
- אומרים ש  $a \in M$  נקודת מקסימום אם  $\exists \epsilon > 0 : \forall x \in M \cap B(a, \epsilon) : f(x) \leq f(a)$
- אומרים ש  $a \in M$  מינימום ממש אם  $\exists \epsilon > 0 : \forall x \in M \cap B(a, \epsilon) : f(x) < f(a)$   $x \neq a$

**משפט**

$W \subseteq \mathbb{R}^n, f : W \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^r(W), r \geq 1$   
 יהיה  $M = \{x \in W : \Phi_1(x) = \dots = \Phi_m(x) = 0\}$  משטח  $C^r$ .  
 אם  $a \in M$  נקודת קיצון מקומי עם התנאי  $\Phi(x) = 0$  אז קיים מספרים  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  כך ש:  
 $\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla \Phi_1(a) + \dots + \lambda_m \nabla \Phi_m(a)$   
 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  נקראים כופלי לגרנז'.  
 ז"א  $\nabla f(a) \perp T_a(M)$ .

**הוכחה**

$a \in M$ , רגולרית ב- $a$ .  $(\Phi_1, \dots, \Phi_m)$

$$\Delta_m \neq 0 : m \times m \text{ בגודל } \text{rank} \begin{pmatrix} (a) & \dots & (a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a) & \dots & (a) \end{pmatrix} = m$$

לפי משפט על פונק' סתומה:

$$\exists U_{a'} V_{a''} : \varphi : U_{a'} \rightarrow V_{a''}$$

$$k = n - m$$

$$M \cap (U_{a''} \times V_{a''}) = \Gamma_\varphi$$

$$M \cap (U_{a''} \times V_{a''}) = \{(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_k)) : x \in U_{a'}\}$$

$$g(x_1, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_k))$$

נגדיר נניח כי  $a$  נקודת קיצון (בה"כ).

$$g(a') = f(a', \varphi(a')) = f(a)$$

$$\forall x \in U_{a'} : g(x) \geq g(a')$$

$a'$  נקודת מינימום ל- $g$  בלי תנאי.

$$g : U_{a'} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ולכן } U_{a'} \subset \circ \text{ נקודה קריטית ל-} g, \text{ כלומר}$$

$$j = 1, \dots, k : (a') = 0$$

נגזור את  $g$  לפי  $x_j$

$$(a') = (a) + \sum_{s=1}^m (a) (a') = 0$$

$$\nabla f(a) \perp \left( 0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0, (a'), \dots, (a') \right) = E_j$$

$$1 \leq j \leq k$$

$$\boxed{\nabla f(a) \perp E_1, \dots, E_k}$$

נוסיף את האינצורים:

$$(x_1, \dots, x_k) \in U_{a'}, \begin{cases} \Phi_1(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_k)) = 0 \\ \Phi_2(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_k)) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_k)) = 0 \end{cases}$$

נגזור לפי  $x_j$

$$\begin{cases} (a) + \sum_{s=1}^m (a) (a') = 0 \\ \vdots \\ (a) + \sum_{s=1}^m (a) (a') = 0 \end{cases}$$

$$1 \leq j \leq k : \langle \nabla \Phi_j(a), E_i \rangle = \langle \nabla \Phi_1(a), \dots, \nabla \Phi_m(a) \rangle \perp E_1, \dots, E_k$$

$$\dim(\text{span}\{E_1, \dots, E_k\}^\perp) = n - k = m \text{ ולכן } \dim \text{span}\{E_1, \dots, E_k\} = k$$

$$\nabla f(a) \underbrace{\nabla \Phi_1(a), \dots, \nabla \Phi_m(a)}_{\text{Independent}} \perp \text{span}\{E_1, \dots, E_k\}$$

Independent

ולכ

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \Phi_i(a)$$

## הרצאה 20

$$f \rightarrow \min, \max$$

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ \Phi_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \Phi_j \in C^r \end{cases}$$

$M = \{\Phi = 0\}$  על רגולרית  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$   
 אם  $a$  נק' קיצון מקומי עם תנאי  $\Phi = 0$  אז  $\nabla f = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \Phi_i$

### כלל כופלי לגראנז'

$$f \rightarrow \max, \min$$

$$\Phi_1(x) = \dots = \Phi_m(x) = 0$$

$$L := f - \sum_{i=1}^m \lambda_i \Phi_i$$

$\nabla L(a) = 0 \Leftrightarrow$  נקודת קיצון  $a$

$$x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m \text{ ממשוואות עבור } n+m \begin{cases} \Phi_1(x) = 0 \\ \dots \\ \Phi_m(x) = 0 \end{cases}, \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

### דוגמא

$$u = x - 2y + 2z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$L = x - 2y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x = 1 - 2\lambda x = 0 & \Rightarrow x = \frac{1}{2\lambda} \\ L'_y = -2 - 2\lambda y = 0 & \Rightarrow y = -\frac{1}{\lambda} \\ L'_z = 2 - 2\lambda z = 0 & z = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{3}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{3}, y = \mp \frac{2}{3}, z = \pm \frac{2}{3}$$

$$a_{1,2} = (\pm \frac{1}{3}, \mp \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{3})$$

$$f(a_1) = 3, f(a_2) = -3 \Rightarrow \max_{s^2} f = 3, \min_{s^2} f = -3$$

### דוגמא

$$f(x, y, z) = xyz$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$L = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z)$$

$$\begin{cases} L'_x = yz - 2\lambda x - \mu = 0 \\ L'_y = xz - 2\lambda y - \mu = 0 \\ L'_z = xy - 2\lambda z - \mu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xyz - 2\lambda x^2 - \mu x = 0 \\ xyz - 2\lambda y^2 - \mu y = 0 \\ xyz - 2\lambda z^2 - \mu z = 0 \end{cases}$$

$$\oplus 3xyz - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}xyz$$

$$yz = \frac{2\lambda}{3x}, yz - 2\lambda x - \mu = 0 \Rightarrow \frac{2\lambda}{3x} - 2\lambda x - \mu = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda - 6\lambda x^2 - 3\mu x = 0 \\ \lambda y - 6\lambda y^2 - 3\mu y = 0 \\ 2\lambda - 6\lambda z^2 - 3\mu z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y \vee x = z \vee y = z$$

נראה עבור  $x = y$

$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{z}{2} \Rightarrow 2\frac{z^2}{4} + z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, x = y = \mp \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{2} = \dots = \mp \frac{1}{\sqrt{6}}$$

### קיצונים על תחום

$\partial\Omega$ -משטח דיפרנציאבלי

$$\exists \max_{x \in \bar{\Omega}} f(x) = f(x_{max}), \min_{x \in \bar{\Omega}} f(x) = f(x_{min}) \text{ Weierstrass לפי משפט } f \in C^1(\bar{\Omega})$$

$$\Phi = 0 \text{ התנאי עם מקומי קיצון } a_{max} \leftarrow a_{max} \in \partial\Omega, a_{max} \in \Omega \Rightarrow \nabla f(a_{max}) = 0$$

$$\nabla f(a) = 0 \text{ נקודות קריטיות } a_1, \dots, a_n$$

$$\max(f(a_1), \dots, f(a_n)) = \max_{x \in \Omega} f(x)$$

### תרגיל

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$$

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

$$\max f(x, y) = ?, \min f(x, y) = ?$$

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 12 = 0 & x = 6 \\ f'_y = 2y + 16 = 0 & y = -8 \end{cases} \Rightarrow a = (6, -8)$$

על השפה:  $x^2 + y^2 = 25$

$$f|_{x^2+y^2=25} = 25 - 12x + 16y$$

$$(6, -8) \notin \bar{\Omega}$$

$$L = 25 - 12x + 16y - \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

$$L'_x = -12 - 2\lambda x = 0$$

$$L'_y = 16 - 2\lambda y = 0$$

$$x = -\frac{6}{\lambda}, y = \frac{8}{\lambda}$$

.....

$$b_{1,2} = (\mp 3, \pm 4)$$

### תרגיל להגשה (בנוס)

$$a_i, x_i \geq 0$$

הוכח כי עבור  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n x_i^q)^{\frac{1}{q}}$   $p, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$|(a, x)| \leq \|a\|_p \|x\|_q$$

רמז:

$$(x_i \geq 0) \sum_{i=1}^n a_i x_i = A \text{ על תנאי } f(x) = (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n x_i^q)^{\frac{1}{q}} \rightarrow \min$$

## פרק 4 אינטגרציה ב $\mathbb{R}^n$ - אינטגרל של Riemann-Darboux

### קטע $n$ מימדי

$$n = 1 : [a, b]$$

$$n > 1 \Rightarrow P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \{x = (x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$$

נפח של  $P$

$$V(P) = \text{vol}(P) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$$

$$\overset{\circ}{P} = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

$$P \overset{\circ}{\cap} Q := \overset{\circ}{P} \cap \overset{\circ}{Q}$$

**חלוקה**

$$n = 1 \Rightarrow [a, b], a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, [a, b] = \bigcup_{i=1}^N \Delta^{(i)}$$

$$n > 1 \Rightarrow P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n], \begin{cases} [a_1, b_1] = \bigcup_{i_1=1}^{n_1} \Delta_1^{(i_1)} \\ \vdots \\ [a_n, b_n] = \bigcup_{i_n=1}^{n_n} \Delta_n^{(i_n)} \\ P_{i_1, \dots, i_n} = \Delta_1^{(i_1)} \times \dots \times \Delta_n^{(i_n)} \end{cases}$$

**חלוקה -  $\mathcal{P} = \{P_{i_1, \dots, i_n}\}$  של  $P$ , בנייה של אינטגרל**

**הגדרה**

תהי פונ'  $f: P \rightarrow R$  קטע  $n$  מימדי,  $f$  חסומה  $M$   $\forall x \in P: |f(x)| \leq M$   
 אם  $\mathcal{P}$  חלוקה של  $P$  אז סכום עליון:  
 $M_i = \sup_{x \in P_i} f(x)$  עבור  $\bar{S}(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n M_i V(P_i)$   
 סכום תחתון:  
 $m_i = \inf_{x \in P_i} f(x)$  עבור  $\underline{S}(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n m_i V(P_i)$   
 $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \bar{S}(f, \mathcal{P})$

**הגדרה**

אם  $\mathcal{Q}, \mathcal{P}$  חלוקות של  $P$  אז נגדיר  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P} := \{Q_i \cap P_i\}$

**למה**

מלבן  $n$  מימדי  $\mathcal{Q}, \mathcal{P}$  חלוקות של  $P$  אזי  $\underline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \bar{S}(f, \mathcal{P})$ .

## הרצאה 21

למה:

$P$  מלבן  $n$  מימדי,  $f : P \rightarrow \mathbb{R}, |f(x)| < C$  אזי:  
 $\forall \mathcal{P}, \mathcal{Q} : \underline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \bar{S}(f, \mathcal{P})$

הוכחה

$$\mathcal{R} := \mathcal{P} \dot{\cap} \mathcal{Q}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}(f, \mathcal{R}) &= \sum_{i,j} \sup_{x \in \mathcal{P}_i \dot{\cap} \mathcal{Q}_j} \text{vol}(\mathcal{P}_i \dot{\cap} \mathcal{Q}_j) = \\ &= \sum_i \left( \sum_j \sup_{x \in \mathcal{P}_i \dot{\cap} \mathcal{Q}_j} f(x) \text{vol}(\mathcal{P}_i \dot{\cap} \mathcal{Q}_j) \right) \leq \sum_i \left( \sum_j \sup_{x \in \mathcal{P}_i} f(x) \text{vol}(\mathcal{P}_i \dot{\cap} \mathcal{Q}_j) \right) \\ &= \sum_i \sup_{x \in \mathcal{P}_i} f(x) \sum_j \text{vol}(\mathcal{P}_i \dot{\cap} \mathcal{Q}_j) = \sum_i \sup_{x \in \mathcal{P}_i} f(x) \text{vol}(\mathcal{P}_i) = \bar{S}(f, \mathcal{P}) \end{aligned}$$

הוכחנו כי  $\bar{S}(f, \mathcal{R}) \leq \bar{S}(f, \mathcal{P})$  מתקיים גם  $\underline{S}(f, \mathcal{R}) \geq \underline{S}(f, \mathcal{Q})$  ולכן:  
 $\underline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \underline{S}(f, \mathcal{R}) \leq \bar{S}(f, \mathcal{R}) \leq \bar{S}(f, \mathcal{P})$   
 $\Rightarrow \underline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \bar{S}(f, \mathcal{P})$

הערה

$$M := \sup_{x \in P} f(x)$$

$$m := \inf_{x \in P} f(x)$$

$$\bar{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_i \sup_{x \in \mathcal{P}_i} f(x) \text{vol}(\mathcal{P}_i) \leq M \sum_i \text{vol}(\mathcal{P}_i) = M \text{vol}(\mathcal{P})$$

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_i \inf_{x \in \mathcal{P}_i} f(x) \text{vol}(\mathcal{P}_i) \geq m \sum_i \text{vol}(\mathcal{P}_i) = m \text{vol}(\mathcal{P})$$

$$m \text{vol}(\mathcal{P}) \leq \underline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \bar{S}(f, \mathcal{P}) \leq M \text{vol}(\mathcal{P})$$

הגדרה

$$\begin{aligned} f : P \rightarrow \mathbb{R}, |f(x)| \leq C \\ \inf_{\mathcal{P}} \bar{S}(f, \mathcal{P}) &:= \bar{I} \\ \sup_{\mathcal{Q}} \underline{S}(f, \mathcal{Q}) &:= \underline{I} \end{aligned}$$

נשים לב כי:

$$\forall \mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1 : \underline{I} \leq \sup_{\mathcal{Q}} \underline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \underline{S}(f, \mathcal{Q}_1) \leq \bar{S}(f, \mathcal{P}_1) \leq \inf_{\mathcal{P}} \bar{S}(f, \mathcal{P}) = \bar{I}$$

הגדרה

$$\begin{aligned} f : P \rightarrow \mathbb{R}, |f(x)| \leq C \\ \underline{I}(f) = \bar{I}(f) := I(f) = \int_P f(x) \end{aligned}$$

אומרים כי  $f$  אינטגרלית לפי רימן-דרבו אם  $f \in \mathcal{R}(P)$  נסמן  $f \in \mathcal{R}(P)$ .

משפט

$$\forall \epsilon > 0 \exists \mathcal{P} : 0 \leq \bar{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \epsilon \text{ אם ורק אם } f \in \mathcal{R}(P)$$

**הוכחה**

נניח כי התנאי מתקיים

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists \mathcal{P} : 0 \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \epsilon \\ \overline{S}(f, \mathcal{P}) < \underline{S}(f, \mathcal{P}) + \epsilon \\ \overline{I} = \inf_{\mathcal{Q}} \overline{S}(f, \mathcal{Q}) < \underline{S}(f, \mathcal{P}) + \epsilon \\ \overline{I} - \epsilon < \underline{S}(f, \mathcal{P}) \\ \overline{I} - \epsilon < \sup_{\mathcal{Q}} \underline{S}(f, \mathcal{Q}) = \underline{I} \\ 0 \leq \overline{I} - \underline{I} < \epsilon \\ \epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \overline{I} = \underline{I} \Rightarrow f \in \mathcal{R}(P) \end{aligned}$$

בכיוון השני, נניח כי  $f \in \mathcal{R}(P)$

נקבע  $\epsilon > 0$

$$\exists \mathcal{Q} : I - \epsilon < \underline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq I$$

$$\exists \mathcal{P} : I < \overline{S}(f, \mathcal{P}) \leq I + \epsilon$$

$$I - \epsilon < \underline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) \leq I + \epsilon$$

$$\text{אז } \mathcal{F} := \mathcal{P} \overset{\circ}{\cap} \mathcal{Q}$$

$$I - \epsilon < \underline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \underline{S}(f, \mathcal{F}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{F}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) \leq I + \epsilon$$

$$0 \leq \overline{S}(f, \mathcal{R}) - \underline{S}(f, \mathcal{R}) \leq 2\epsilon$$

$$\boxed{f \in \mathcal{R}(P) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \mathcal{P} : 0 \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \epsilon}$$

**משפט**

אם  $f \in \mathcal{F}(P)$  אזי  $f \in C(P)$

**הוכחה**

נקבע  $\epsilon > 0$ , לפי משפט קנטור  $f$  רציפה במ"ש ב- $P$ .

$$\exists \delta > 0 : \forall x, y \in P : \|x - y\|_{\infty} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$$P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

$$\text{ניקח } N \text{ טבעי כך ש: } \frac{\max(b_i - a_i)}{N} < \delta$$

$$\frac{\max(b_i - a_i)}{\delta} < N$$

$$\Delta_i^{(s)} = a_i + \frac{s}{N} (b_i - a_i)$$

$$\mathcal{P} = \left\{ \Delta_1^{(i_1)} \times \dots \times \Delta_n^{(i_n)} \right\} = \{ \mathcal{P}_i \}$$

$$|M_i - m_i| < \epsilon \text{ וגם } |f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ ולכן } \|x - y\|_{\infty} < \delta \text{ כי } x, y \in \mathcal{P}_i$$

$$M_i = \sup_{x \in \mathcal{P}_i} f(x) = f(x_{max}), m_i = \inf_{x \in \mathcal{P}_i} f(x) = f(x_{min})$$

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_i M_i V(\mathcal{P}_i) - \sum_i m_i V(\mathcal{P}_i) = \sum_i (M_i - m_i) V(\mathcal{P}_i) < \epsilon \sum_i V(\mathcal{P}_i) = \epsilon V(P)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \mathcal{P} : 0 \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \epsilon V(P)$$

ולכן לפי הקריטריון  $f \in \mathcal{R}(P)$

**קבוצות ממידה אפס**

**הגדרה**

$$\sum_{i=1}^{\infty} V(P_i) < \epsilon \text{ ו-} N \subset \bigcup_{i=1}^n \overset{\circ}{P}_i \text{ ש-} P_i \text{ קטעים, } \forall \epsilon \exists \{P_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ אם } \text{mes} N = 0, N \subset \mathbb{R}^n$$

**דוגמא**

$$n = 1 : \{r_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ רציונלים}$$

נקבע  $\epsilon > 0$

$$P_n = \left( r_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \right)$$

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$$

$$\text{עוד דוגמא היא קבוצת קנטור, כי כל שלב מורידים } \frac{2}{3} \text{ מהקטע } \frac{2}{3} \text{ . } \text{mes}(K) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3} = 1 - \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = 0$$



**למה**

$N$  קומפקטית אז כל כיסוי  $N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$  כולל תת-כיסוי סופי.

**מסקנה**

אם  $N$  קומפקטית:

$$\text{mes}N = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \{P_i\}_{i=1}^M : N \subset \bigcup_{i=1}^M P_i, \sum_{i=1}^M V(P_i) < \epsilon$$

**משפט**

$f \in \mathcal{R}(P)$  או  $\text{mes}N = 0$ , קבוצה קומפקטית,  $f \in C(P \setminus N)$  עבור  $f : P \rightarrow \mathbb{R}, |f(x)| < C$  נניח ש

**הוכחה**

נקבע  $\epsilon > 0$

מלמה קודמת  $N \subset P_1 \cup \dots \cup P_M$  כך ש  $\sum_{i=1}^M V(P_i) < \epsilon$

$$K := P \setminus \left( \bigcup_{i=1}^M P_i \right)$$

קבוצה חסומה וסגורה, קומפקטית.

$\mathcal{P}'$  חלוקה שמוכלת ב  $\{P_i\}_{i=1}^M$ ,  $f \in C(K)$  ולכן לפי משפט קנטור  $f$  רציפה במ"ש.

$$\exists \delta > 0 : \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

בונים חלוקה  $\mathcal{P}''$  כך ש:

$$\forall \mathcal{P}_i'' \subset K : \left| \sup_{\mathcal{P}_i} f(x) - \inf_{\mathcal{P}_i} f(x) \right| < \epsilon$$

$$\mathcal{P}''' = \mathcal{P}' \overset{\circ}{\cap} \mathcal{P}''$$

מקבלים חלוקה  $\mathcal{P}'''$

$$\forall Q_j \in \mathcal{P}''' : Q_j \overset{\circ}{\cap} P_i \neq \emptyset$$

$$\text{לפי רציפות במ"ש.} \left| \sup_{Q_j} f(x) - \inf_{Q_j} f(x) \right| < \epsilon$$

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}''') - \underline{S}(f, \mathcal{P}''') =$$

$$\sum_{i=1}^M \left( \sup_{x \in P_i} f(x) - \inf_{x \in P_i} f(x) \right) V(P_i) + \sum_{Q_j \in \mathcal{P}'''} \left( \sup_{x \in Q_j} f(x) - \inf_{c \in Q_j} f(x) \right) V(Q_j)$$

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq C \\ \left| \sup_{x \in P_i} f(x) - \inf_{c \in P_i} f(x) \right| &\leq 2C \end{aligned}$$

.1

$$\sum_{i=1}^M \left( \sup_{x \in P_i} f(x) - \inf_{x \in P_i} f(x) \right) V(P_i) \leq 2C \sum_{i=1}^M V(P_i) < 2C\epsilon$$

.2

$$\sum_{Q_j \in \mathcal{P}'''} \left( \sup_{x \in Q_j} f(x) - \inf_{c \in Q_j} f(x) \right) Vol(Q_j) \leq \epsilon Vol(P)$$

$$\Rightarrow |\overline{S} - \underline{S}| \leq 2C\epsilon + \epsilon Vol(P)$$

כלומר אם היינו לוקחים  $\frac{\epsilon}{2C + Vol(P)}$  היה יוצא קטן מ- $\epsilon$ .

**נפח****הגדרה**

תהי  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , פונקציה קרקטריסטית (indicator) :

$$\chi_{\Omega}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \Omega \\ 0 & , x \notin \Omega \end{cases}$$

**הגדרה**

$\Omega$  קבוצה חסומה:  $\exists P : \Omega \subset P$   
 $\chi_{\Omega} \in \mathcal{R}(P)$  אם בעלת נפח (מדידה לפי רימן) אם

**הגדרה**

אם  $\Omega$  מדידה אז  $\int \chi_{\Omega}(x) dx := Vol(\Omega)$

## הרצאה 22

$$\begin{aligned} & \Omega \subset P \\ & \chi \in \mathcal{R}(P) \\ \underline{S}(\chi_\Omega, P) = 0, \overline{S}(\chi_\Omega, P) = 1 \text{ כי דיפ' לא דיריכלה לא דיפ' } \chi_\Omega \text{ } n = 1 : \Omega = \{r \in \mathbb{Q} : r \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

### אינטגרל על קבוצה

הגדרה:

$$\begin{aligned} & A \subset P; A \in \mathcal{R}(P) \\ \int_A f(x) & := \int_P \chi_A(x) f(x) dx \end{aligned}$$

תכונות

אדטיביות:

$$\begin{aligned} & 1. A, B \\ & A \cap B = \phi \\ & \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B \\ & (\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}) \end{aligned}$$

$$2. A, B \subset P$$

$$A \cap B = \phi \Rightarrow \int_{A \cup B} f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx$$

3. חיוביות:

$$\begin{aligned} & f \geq 0 \Rightarrow \int_P f(x) dx \geq 0 \\ f, g \in \mathcal{R}(P) : f(x) \geq g(x) & \Rightarrow \overline{S}(f, P) \geq \overline{S}(g, P) \Rightarrow \int_P f(x) dx \geq \int_P g(x) dx \end{aligned}$$

מסקנה

$$1. m \leq f(x) \leq M \text{ כאשר } m$$

$$mV(P) = \int_P m dx \leq \int_P f(x) dx \leq \int_P M dx = MV(P)$$

2.

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow -\int_P |f(x)| dx \leq \int_P f(x) dx \leq \int_P |f(x)|$$

אי שוויון המשולש

$$\left| \int_P f(x) dx \right| \leq \int_P |f(x)|$$

$$\left| \int_A f(x) dx \right| \leq \sup_{x \in A} |f(x)| \int_A dx = \sup_{x \in A} |f(x)| V(A)$$

$$\int_P (-f(x)) dx = -\int_P f(x) dx$$

**הוכחה**

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B} (-f, (x)) &= - \inf_{x \in B} f(x) \\ &\text{חלוקה של } P \\ \overline{S}(-f, P) &= -\underline{S}(f, P) \\ \inf_P \overline{S}(-f, P) &= \sup_P \underline{S}(-f, P) = -\sup_P \underline{S}(f, P) = -\inf_P \overline{S}(f, P) = -\int_P f(x) dx \\ &\Rightarrow \int_P (-f(x) dx) = -\int_P f(x) dx \\ &\boxed{\int_P \alpha f(x) dx = \alpha \int_P f(x) dx} \end{aligned}$$

**הוכחה**

$$\alpha \geq 0 \text{ ולכן מספיק לקחת } \alpha = \begin{cases} |\alpha| & \alpha \geq 0 \\ -|\alpha| & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sup_x \alpha f(x) &= \alpha \sup_x f(x) \\ \inf_x \alpha f(x) &= \alpha \inf_x f(x) \\ &\downarrow \\ \overline{S}(\alpha f, P) &= \alpha \overline{S}(f, P) \\ \underline{S}(\alpha f, P) &= \alpha \underline{S}(f, P) \\ \int_P \alpha f(x) dx &= \int_P \inf_P \overline{S}(\alpha f, P) = \alpha \int_P \inf_P \overline{S}(f, P) = \alpha I(f) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_P (f + g) dx = \int_P f dx + \int_P g dx}$$

**הוכחה**

$P, Q$  חלוקות של  $P$ .

$$\begin{aligned} &\overline{S}(f + g, P \dot{\cap} Q) \\ &= \sum_{i,j} \sup_{x \in P_i \dot{\cap} Q_j} (f(x) + g(x) V(P_i \dot{\cap} Q_j)) + \sum_{i,j} \sup_{x \in P_i \dot{\cap} Q_j} g(x) V(P_i \dot{\cap} Q_j) \\ &\leq \overline{S}(f, P \dot{\cap} Q) + \overline{S}(g, P \dot{\cap} Q) \leq \overline{S}(f, P) + \overline{S}(g, Q) \\ &\text{קיבלנו } \overline{S}(f + g, P \dot{\cap} Q) \leq \overline{S}(f, P) + \overline{S}(g, Q) \\ &\underline{S}(f, P) + \underline{S}(g, Q) \leq \underline{S}(f + g, P \dot{\cap} Q) \leq \overline{S}(f + g, P \dot{\cap} Q) \leq \overline{S}(f, P) + \overline{S}(g, Q) \\ &\text{וגם } \overline{I}(f + g) \leq \overline{S}(f + g, P \dot{\cap} Q) \leq \overline{S}(f, P) + \overline{S}(g, Q) \\ &\underline{S}(f, P) + \underline{S}(g, Q) \leq \underline{S}(f + g, P \dot{\cap} Q) \leq \underline{I}(f + g) \\ &\text{קיבלנו: } \underline{S}(f, P) + \underline{S}(g, Q) \leq \underline{I}(f + g) \leq \overline{I}(f + g) \leq \overline{S}(f, P) + \overline{S}(g, Q) \\ &\downarrow \\ \sup_P \underline{S}(f, P) + \sup_Q \underline{S}(g, Q) &\leq \underline{I}(f + g) \leq \overline{I}(f + g) \leq \inf_P \overline{S}(f, P) + \inf_Q \overline{S}(g, Q) \\ I(f) + I(g) &\leq \underline{I}(f + g) \leq \overline{I}(f + g) \leq I(f) + I(g) \\ I(f) + I(g) &= I(f + g) \text{ ולכן} \end{aligned}$$

**הערה**

אם  $N \subseteq P$  קבוצה קומפקטית,  $mes N = 0$  ו- $N \cap P \setminus N = \emptyset$  אז  $f(x) = g(x) \forall x \in P \setminus N$  ו- $I(f) = I(g)$  ו- $f \in \mathcal{F}(P) \Leftrightarrow g \in \mathcal{F}(P)$

## מחלקה $E(P)$

הגדרה

$f \in E(P)$  אם:  
 $\exists A_1, \dots, A_k \subset P$  כך ש:

1.  $A_j$  קומפקטית
2.  $A_j \subset M_j$  עבור  $M_j$  משטח דפ'  $r \geq 1$ ,  $C^r$
3.  $f \in C\left(P \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right)\right)$

משפט

אם  $f: P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה ו  $f \in E(P)$  אז  $f \in \mathcal{R}(P)$ .

מספיק להראות כי

אם  $A \subset M \subset P$  עבור  $M$ -משטח  $C^r$ ,  $r \geq 1$  אז  $\text{mes} A = 0$ .

למה

$K$ -קטע  $n$  מימדי ו  $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$ -פונקציה,  $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right| \leq C$ ,  $x \in K$ ,  $1 \leq j \leq n$   
 אז  $\varphi$  רציפה במידה שווה ב- $K$

הוכחה

$$\forall x, y \in K: \varphi(x) - \varphi(y) = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x + \theta(y-x))(x_j - y_j)_{0 < \theta < 1}$$

ולכן

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x + \theta(y-x)) \right| |x_j - y_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x + \theta(y-x)) \right| \leq \\ &\leq C_n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = C_n \|x_i - y_i\| \end{aligned}$$

$$\text{נקבע } \delta := \frac{\epsilon}{C_n}, \epsilon > 0 \\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \epsilon$$

למה

אם  $A \subset M \subset P$ ,  $M$ -משטח  $C^r$ ,  $r \geq 1$  אז  $\text{mes} A = 0$  (קבוצה קומפקטית)

הוכחה

גרף  $\Gamma_\varphi$   $\forall x \in M \exists U_x \ni x: U_x \cap M = \Gamma_\varphi$

כיסוי פתוח  $M \subseteq \bigcup_{x \in M} U_x$

$A$  קומפקטית ולכן קיים כיסוי סופי  $M \subseteq \bigcup_{s=1}^N U_s$

$A = \bigcup_{s=1}^N (U_s \cap A)$

$\text{mes}(U_s \cap A) = 0?$

בה"כ נניח  $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$

$\Gamma_\varphi = \{x: x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}), x_1, \dots, x_{n-1} \in K\}$  קטע  $n-1$  מימדי.

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x', x'' \in K$  ולכל  $\varphi$  רציפה במ"ש ב- $K$  ולכל  $\varphi \in C^1(K)$   $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \leq \delta \Rightarrow |\varphi(x') - \varphi(x'')| < \epsilon$

$$K \|x' - x''\|_\infty < \delta \Rightarrow |\varphi(x') - \varphi(x'')| < \epsilon$$

ניקח חלוקה של  $K = \bigcup_{i=1}^s P'_i$  כל  $\forall x', x'' \in P'_i : \|x' - x''\|_\infty < \delta$   
 נבחר  $\xi_i \in P'_i$   
 נגדיר  $P_i = P' \times [\varphi(\xi_i) - \frac{\epsilon}{2}, \varphi(\xi_i) + \frac{\epsilon}{2}]$   
 $x' \in K, x_1 = \varphi(x')$   
 $K = \bigcup P'_i \Rightarrow \exists x' \in P'_i$   
 לפי בחירה  
 $|\varphi(x') - \varphi(\xi_i)| < \epsilon$   
 $x_n \in [\varphi(\xi_i) - \frac{\epsilon}{2}, \varphi(\xi_i) + \frac{\epsilon}{2}]$   
 קיבלנו  $\forall x \in \Gamma_\varphi \exists i : P'_i \times [\varphi(\xi_i) - \frac{\epsilon}{2}, \varphi(\xi_i) + \frac{\epsilon}{2}] = P_i$   
 כיסוי  $\Gamma_\varphi \subseteq \bigcup_{i=1}^s P_i$   
 $mes(\Gamma_\varphi) = 0$  ולכן  $\sum_{i=1}^s v(P_i) = \sum_{i=1}^s v(P'_i) \epsilon = v(K) \epsilon$

**מסקנה**

$f$  חסומה ב- $P$   
 $f \in E(P) \Rightarrow f \in \mathcal{F}(P)$

**הגדרה**

1.  $\bar{\Omega} = \Omega$  תחום סגור אם  $\bar{\Omega} = \Omega$
2.  $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \overset{\circ}{\Omega}$  שפה
3.  $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^s M_j$  תחום פשוט אם  $\partial\Omega$  עבור  $M_j$ -משטחים  $C^r$ .

**הערה**

אם  $\Omega \in \mathcal{R}(P)$  תחום חסום ופשוט אז

**הוכחה**

$\Omega \subset P$  חסומה ולכן קיים קטע  $n$  מימדי כך ש  $\Omega \subset P$   
 $\chi_\Omega$  אי רציפה לכל היותר ב  $\partial\Omega$   
 $\chi_\Omega \in \mathcal{R}(P)$  רציפה חוץ מקבוצה במידה 0 ולכן  $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^n M_j$

**הגדרה**

אם  $\Omega$  קבוצה מדידה  $\Omega \in \mathcal{R}(P)$  (וחסומה) אז לפי ההגדרה:  
 $V(\Omega) = \int_P \chi_\Omega dx = \int_\Omega 1 dx$

## הרצאה 23

$\Omega$  תחום פשוט

$$f \in E(\Omega)$$

$\exists A_1, \dots, A_k \subset \Omega$  כך ש- $A_j$  קומפקטית

$$A_k \subset M_k \text{ -משטח, } C^r \text{ -משטח, } M_k$$

$$\Omega \subset P$$

$f \chi_\Omega(x)$  - אי רציפות ב- $A_1 \cup \dots \cup A_k$  וגם ב- $\partial\Omega$ , ולכן  $f \chi_\Omega$  אינטגרבילית ב- $P$ .

### משפט של Fubini

$$\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$\mathbb{R}^{n+m} \ni x = (x', x'') : x' \in \mathbb{R}^n, x'' \in \mathbb{R}^m$$

$n + m$  קטע מימדי

$$P = P' \times P''$$

$$P = \prod_{j=1}^{n+m} [a_j, b_j] = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j] \times \prod_{j=n+1}^{n+m} [a_j, b_j]$$

אם  $\mathcal{P}$ -חלוקה של  $P$  אז  $\mathcal{P} = \{P_{ij} : P_{ij} = P'_i \times P''_j; P' = \{P'_i\}, P'' = \{P''_j\}\}$  כאשר  $P', P''$  חלוקות של  $P', P''$  בהתאמה.

$$P = P' \times P'' \Rightarrow \mathcal{P} = P' \times P''$$

### משפט (Fubini)

$$\mathbb{R}^{n+m} \supset P = P' \times P''$$

תהי  $f \in \mathcal{R}(P)$ , נניח שלכל  $x' \in P'$  הפונקציה  $x' \rightarrow f(x', x'')$  אינטגרבילית ב- $P''$  ונגדיר  $\Phi(x') = \int_{P''} f(x', x'') dx''$ .

$$\int_{P'} \Phi(x') dx' = \int_P f(x) dx \quad \Phi \in \mathcal{R}(P')$$

$$\text{כלומר } \int_{P'} \left( \int_{P''} f(x', x'') dx'' \right) dx' = \int_{P=P' \times P''} f(x) dx$$

### הוכחה

נקח חלוקה  $\mathcal{P}'$  של  $P'$

$$\begin{aligned} \bar{S}(\Phi, \mathcal{P}') &= \sum_{i=1}^N \sup_{x' \in P'_i} \Phi(x') v(P'_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sup_{x' \in P'_i} \left( \int_{P''} f(x', x'') dx'' \right) v(P'_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sup_{x' \in P'_i} \left( \sum_{j=1}^n \int_{P''_j} f(x', x'') dx'' \right) v(P'_i) \\ &\leq \sum_i \sup_{x' \in P'_i} \left( \sum_j \sup_{x'' \in P''_j} f(x', x'') v(P''_j) \right) v(P'_i) \\ &\leq \sum_{i,j} \sup_{x' \in P'_i} \sup_{x'' \in P''_j} f(x', x'') v(P''_j) v(P'_i) \\ &= \sum_{i,j} \sup_{x \in P'_i \times P''_j} f(x) v(P'_i \times P''_j) \\ &= \bar{S}(f, \mathcal{P}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &P = \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'' \text{ חלוקה של } P \\
 &\underline{S}(\Phi, \mathcal{P}') \leq \underline{S}(f, \mathcal{P}) \\
 &\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{S}(\Phi, \mathcal{P}') \text{ וגם באותה הדרך} \\
 &\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{S}(\Phi, \mathcal{P}') \leq \overline{S}(\Phi, \mathcal{P}') \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) \text{ ולכן} \\
 &\mathcal{P} = \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'' \\
 &\epsilon > 0 \text{ נקבע} \\
 &\exists \mathcal{P}' : \overline{S}(f, \mathcal{P}') < I(f) + \epsilon \\
 &\mathcal{P} = \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'' \\
 &\overline{S}(\Phi, \mathcal{P}') < I(f) + \epsilon \text{ אז} \\
 &\overline{I}(\Phi) = \inf_{\mathcal{P}'} \overline{S}(f, \mathcal{P}') < I(f) + \epsilon \\
 &\exists \mathcal{P}' : I(f) - \epsilon \leq \underline{S}(f, \mathcal{P}') \\
 &\mathcal{P} = \mathcal{P}' \times \mathcal{P}'' \\
 &I(f) - \epsilon < \underline{S}(\Phi) \text{ אז} \\
 &\text{ולכן:} \\
 &I(f) - \epsilon < \underline{I}(\Phi) \leq \overline{I}(\Phi) < I(f) + \epsilon \\
 &\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow I(\Phi) = \underline{I}(\Phi) = \overline{I}(\Phi) \Rightarrow \Phi \in \mathcal{R}(\mathcal{P}')
 \end{aligned}$$

**הערה**

גם אם לכל  $x'' \in P''$  הפונקציה  $x' \in P' \rightarrow f(x', x'') \in \mathcal{R}(P')$  אז  $\Psi(x'') := \int_{P'} f(x', x'') dx'$  היא אינטגרבילית ב- $P''$  ו- $\int_{P''} \Psi(x'') dx'' = \int_P f(x) dx$

**משפט Fubini**

$$\begin{aligned}
 &P = P' \times P'', f \in \mathcal{R}(P) \\
 &\text{אם:} \\
 &\forall x' \in P' : f(x', *) \in \mathcal{R}(P'') \\
 &\forall x'' \in P'' : f(*, x'') \in \mathcal{R}(P') \\
 &\text{אז קיימים האינטגרלים:} \\
 &\int_{P'} \left( \int_{P''} f(x', x'') dx'' \right) dx' = \int_{P''} \left( \int_{P'} f(x', x'') dx' \right) dx'' = \int_P f(x) dx \\
 &P = P' \times P'' \\
 &\int_{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]} f(x) dx = \int_{[a_1, b_1]} \dots \int_{[a_n, b_n]} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1 \\
 &\Omega \text{ תחום פשוט, } f \in E(\Omega)
 \end{aligned}$$

**דוגמא**

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 \int_x^{2x} (f(x, y) dy) dx \\
 &0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x
 \end{aligned}$$

$$I = \iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x}} f(x, y) dx dy = \int_0^4 \left( \int_{\frac{y}{2}}^{\min(y, 2)} f(x, y) dx \right) dy = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx dy + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx dy$$

**דוגמא**

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 y^3 e^{xy^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^1 y^3 e^{xy^2} dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{y^2} (e^{y^2} - 1) dy = \int_0^1 y (e^{y^2} - 1) dy = \int y e^{y^2} dy - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e - 1) - \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2}$$

**דוגמא - נוסחת דיריכלה**

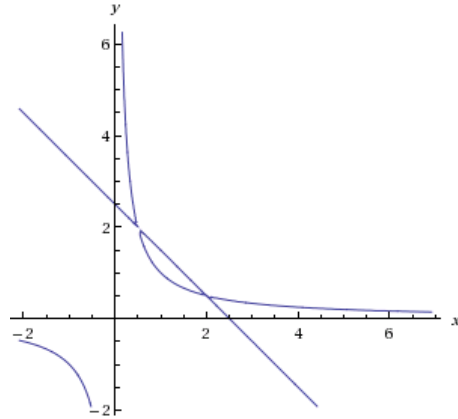
$$\begin{aligned}
 a > 0 \int_0^a dx \left( \int_0^x f(x, y) dy \right) &= \int_0^a dy \left( \int_y^a f(x, y) dx \right) \\
 \text{נהוג גם לכתוב אינטגרלים כפולים עם } dx &\text{ לפני.} \\
 \Omega : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x
 \end{aligned}$$



**שטח**

$$\Omega : \begin{cases} xy = a^2 \\ x + y = \frac{5}{2}a, a > 0 \\ y = \frac{5}{2}a - x \\ x \left(\frac{5}{2}a - x\right) = a^2 \\ x_1 = 2a, x_2 = \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$S = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} \left( \int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5}{2}a - x} dy \right) dx = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} \left( \frac{5}{2}a - x - \frac{a^2}{x} \right) dx = \dots$$



**דוגמא ב-3**

$$\int_0^1 dx \left( \int_0^{1-x} dy \left( \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \right) \right) = \int dz (dx (f dy))$$

$$\Omega : \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \quad \downarrow \uparrow \\ 0 \leq z \leq x + y \end{cases}$$

$$0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq 1, y \leq 1 - x$$

$$\max(z - x, 0) \leq y \begin{cases} z - x \leq y \\ 0 \leq y \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 dz \left( \int_0^1 dx \left( \int_{\max(z-x, 0)}^{1-x} f(x, y, z) dy \right) \right)$$

$$z = x + y \Rightarrow x + y - z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, 1, -1)$$

**נוסחת החלפת משתנים**

עבור  $n = 1$

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy$$

$$x \in (a, b); \varphi'(x) \neq 0; \varphi \in C^1(a, b)$$

$$\varphi \leftarrow \varphi'(x) \neq 0 \text{ יורד או עולה ממש}$$

1. אם  $\varphi$  עולה  $c > d$   $\int_{[a,b]} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{[c,d]} f(y) dy$

2. אם  $\varphi$  יורד  $\int_{[a,b]} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = - \int_{[d,c]} f(y) dy$

$$\Downarrow \\ \int_{[a,b]} f(\varphi(x)) (-\varphi'(x)) dx = \int f(y) dy$$

## הרצאה 24

### משפט (החלפת משתנים)

$\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$  - תחומים פשוטים

$r \geq 1$  - דיפאומורפיזם,  $C^r$  -  $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$

תהי  $f \in \mathcal{R}(\Omega_2)$  (למשל  $f$  חסומה) ו  $f \in E(\Omega_2)$ .

$$\int_{\Omega_1} f(\varphi(x)) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) \right| dx = \int_{\Omega_2} f(y) dy$$

אז הפונקציה  $f(\varphi(x)) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) \right|$  אינטגרבלית ב  $\Omega_1$  ו

למה 1

אם  $\Omega_1 = \bigcup_{j=1}^N \Omega_j^j$ , תחום פשוט,  $\Omega_j^j \cap \Omega_j^i = \emptyset$  לכל  $i \neq j$ .  
המשפט נכון לכל  $\Omega_j^j$  אז הוא נכון ל  $\Omega$ .

הוכחה

$$\forall j = 1 \dots N : \int_{\Omega_j^j} f(\varphi(x)) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right| dx = \int_{\varphi(\Omega_j^j)} f(y) dy$$

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j^j} f(\varphi(x)) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right| dx = \sum_{j=1}^N \int_{\varphi(\Omega_j^j)} f(y) dy$$

$$\int_{\Omega_1} f(\varphi(x)) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right| dx = \int_{\varphi(\Omega_1)} f(y) dy$$

למה 2

$\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$ , דיפ'  $C^r$ ,  $h, k, \Omega_1 \xrightarrow{h} \Omega_2 \xrightarrow{k} \Omega_3$

אם המשפט נכון ל  $h$  ול  $k$  אז המשפט נכון ל  $k \circ h$ .

הוכחה

$$\text{סימון: } \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) := \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)$$

$$\int_{\Omega_3} f(z) dz = \{z = k(y); y \in \Omega_2\} = \int_{\Omega_2} f(k(y)) \left| \frac{\partial k}{\partial y}(y) \right| dy =$$

$$= \{y = h(x), x \in \Omega_1\} = \int_{\Omega_1} f(k(h(x))) \left| \frac{\partial k}{\partial y}(h(x)) \right| \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x) \right| dx = \int_{\Omega_1} f((k \circ h)(x)) \left| \frac{\partial(k \circ h)}{\partial x}(x) \right| dx$$

הגדרה

$\varphi$  שומרת קאורדינטות  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  אם  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(x), \dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, \dots, \varphi_n(x))$  כלומר  $\varphi_{i_j}(x) = x_{i_j}$  לכל  $1 \leq j \leq k$ .

דוגמא

$n = 2$ :  $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), y)$  שומר  $y$ .

**למה 3**

יהי דיפאומורפיזם  $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  אז לכל נקודה  $a \in \Omega_1$  קיימת סביבה  $U_a \ni a$  כך ש  $\forall x \in U_a : \varphi(x) = (k \circ h)(x)$  ש  $k, h$  - שומרים קאורדינטות (לפחות 1).

**הוכחה**

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a) \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Delta_{n-1} \neq 0$  קיים מינור כזה, בה"כ:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})}(a) \neq 0$$

$$x = (x', x_n)$$

$$x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$$

נגדיר  $h, h(x) := (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), x_n)$  שומר  $x_n$ .

$$\frac{\partial h}{\partial x}(a) = \det \begin{pmatrix} \vdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots \\ \Delta_{n-1} & \vdots \\ \dots & \dots & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}(a) \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \Delta_{n-1}(a) \neq 0$$

לפי משפט על פונל הפוכה  $\exists U_a \ni a$  כך ש  $h : U_a \rightarrow h(U_a)$  דיפאומורפיזם.  
 דיפאומורפיזם  $C^r - \exists h^{-1} : h(U_a) \rightarrow U_a$   
 נגדיר  $k(y) = (y_1, \dots, y_{n-1}, \varphi(h^{-1}(y)))$   
 שומר  $k$   $y_1, \dots, y_{n-1}$   
 $k(h(x)) = (h_1(x), \dots, h_{n-1}(x), \varphi_n(h^{-1}(h(x)))) = \varphi(x)$   
 $\Rightarrow \varphi = k \circ h$

**הוכחה של המשפט**

$$\Omega \subset \bigcup_{j=1}^N U_{a_j} \quad \forall a \in \Omega \exists U_a$$

$$\Omega_j \subset U_{a_j}, \Omega_j - \text{תחום פשוט}, \Omega = \bigcup_{j=1}^N \Omega_j$$

לפי למה 1 מספיק להוכיח לכל  $\Omega_j$  ולכן נסמן  $\Omega = \Omega_j, \varphi = k \circ h$  לפי למה 3.  
 לפי למה 2 מספיק להוכיח עבור או  $k$  או  $h$ .

נראה באינדוקציה לפי  $n$ .

עבור  $n = 1$  הוכחנו, נניח כי נכון עבור  $n - 1$ .

נראה עבור  $n$ , ועבור  $h$ :

$$h(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), x_n)$$

$$x = (x', x_n)$$

$$Pr_n \Omega = \{t \in \mathbb{R} : \exists x' \in \mathbb{R}^{n-1} (x', t) \in \Omega\}$$

$$\frac{\partial h(h', t)}{\partial(x', t)}(x', t) = \frac{\partial(h_1, \dots, h_{n-1})}{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})}(x', t) = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})}(x', t)$$

$$\int_{\Omega} (f \circ h) \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x) \right| dx = \int_{t \in Pr_n \Omega} \left( \int_{\Omega_t = \Omega \cap \{x_n=t\} \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(\varphi_1(x', t), \dots, \varphi_{n-1}(x', t), t) \left| \frac{\partial h(x', t)}{\partial(x', t)} \right| dx' \right) dt =$$

$$= \int_{t \in Pr_n \Omega} \left( \int_{x' \in \Omega_t \subset \mathbb{R}^{n-1}} f(h(x', t)) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})}(x', t) \right| dx' \right) dt =$$

נבצע החלפת משתנים ב  $n-1$ :

$$= \int_{t \in Pr_n \Omega} \left( \int f(y, t) dy \right) dt = \int_{\Omega} f(x) dx$$

$$\boxed{\int_{\varphi(\Omega)} f(y) dy = \{y = \varphi(x)\} = \int_{\Omega} f(\varphi(x)) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right| dx}$$

**משמעות גאומטרית של יעקוביאן:**

$$a \in \mathbb{R}^n, a \in \Omega, \text{ דיפאומורפיזם, } \varphi : \Omega \rightarrow \varphi(\Omega)$$

$$B(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \epsilon\}$$

$$\varphi : B(a, \epsilon) \rightarrow \varphi(B(a, \epsilon))$$

$$V(\varphi(B(a, \epsilon))) = \int_{\varphi(B(a, \epsilon))} dy = \int_{B(a, \epsilon)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right| dx$$

$$\min_{x \in B(a, \epsilon)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right| v(B(a, \epsilon)) \leq \int_{B(a, \epsilon)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right| dx \leq \max_{x \in B(a, \epsilon)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right| v(B(a, \epsilon))$$

$$\min_{B(a, \epsilon)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{V(B(a, \epsilon))} \leq \max_{x \in B(a, \epsilon)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right|$$

$$\Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{V(B(a, \epsilon))} \int_{B(a, \epsilon)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right| dx = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a) \right|$$

ולכן

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V(\varphi(B(a, \epsilon)))}{V(B(a, \epsilon))} = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a) \right|$$

**קאורדינטות קוטביות  $n = 2$**

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = \int_{\Omega} f(y_1(x), \dots, y_n(x)) \left| \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x) \right| dx_1 \dots dx_n$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

להשלים:  $\iint_{\varphi(\Omega)} f(x, y) dx dy =$

**דוגמא**

$$\int_{x^2+y^2=1} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r dr d\varphi = \frac{1}{4} 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$S(B(0, R)) = \int_{x^2+y^2=R} dx dy = \dots = \pi R^2$$

**דוגמא**

$$S(\Omega) = ?$$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2 xy\}$$

$$\partial\Omega : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$$

$$\partial\Omega : r^4 = 2a^2 r^2 \cos \varphi \sin \varphi$$

$$r^2 = 2a^2 \cos \varphi \sin \varphi = a^2 \sin 2\varphi$$

$$\sin 2\varphi \geq 0, 0 \leq 2\varphi \leq \pi, 2\pi \leq 2\varphi \leq 3\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \pi \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi$$

$$S(\Omega) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr \right) d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{r^2}{2} \Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \right) d\varphi = \dots = a^2$$

**דוגמא ב  $n = 3$  קאורדינטות ספריות**

$$R, \varphi, \psi$$

$$-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \varphi < 2\pi$$

$$z = R \sin \psi$$

$$\begin{aligned} x &= R \cos \psi \cos \varphi \\ y &= R \cos \psi \sin \varphi \\ \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(R,\varphi,\psi)} &= R^2 \cos \psi \\ R &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

## הרצאה 25

$$\begin{aligned} z &= r \sin \psi \\ x &= r \cos \psi \cos \varphi \\ y &= r \cos \psi \sin \varphi \\ -\frac{\pi}{2} &< \psi < \frac{\pi}{2} \\ 0 &< \varphi < 2\pi \\ D &= \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = r^2 \cos \psi \end{aligned}$$

$$V(B^3(0,R)) = \int_{B^3(0,R)} dx dy dz = \int_0^R r^2 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \sin \psi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi = \frac{4}{3} \pi R r^3$$

$:\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \varphi_1 \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ \dots \\ x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \cos \varphi_{n-1} \\ x_n = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1} \end{cases}$$

$$D = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})} = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-1}$$

$$V(B^n(0,R)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} R^n$$

ולכן  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$

$$\begin{aligned} \text{vol}(B^{2k+1}(0,R)) &= \frac{2^{k+1} \pi^k}{(k+1)!} R^{2k+1} \\ \text{vol}(B^{2k}(0,R)) &= \frac{\pi^k}{k!} R^{2k} \end{aligned}$$

## שטח

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x,y) : a < x < b, 0 < y < f(x)\} \\ S(\Omega) &= \iint_{\Omega} dx dy = \int_{[a,b]} \left( \int_0^{f(x)} dy \right) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx \end{aligned}$$

## תרגיל

$$\begin{aligned} \Omega : xy &= a^2, xy = 2a^2, y = x, y = 2x \\ S(\Omega) &=? \\ u &= xy, v = \frac{y}{x} \\ \varphi : \Omega &\rightarrow D, \varphi(x,y) = (u,v) = \left(xy, \frac{y}{x}\right) \\ D &= \left\{ (u,v), \begin{array}{l} a^2 \leq u \leq 2a^2 \\ 1 \leq v \leq 2 \end{array} \right\} \\ S(\Omega) &= \iint_{\Omega} dx dy = \iint_D \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 2v$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2v}$$

$$S(\Omega) = \iint_{\substack{a^2 \leq u \leq 2a^2 \\ 1 \leq v \leq 2}} \frac{1}{2v} du dv = \frac{a^2}{2} \int_{[1,2]} \frac{1}{v} dv = \frac{a^2}{2} \ln(2)$$

**נפח של מקבילון n מימדי**

$$\Omega : \begin{aligned} A_1 &\leq a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq B_1 \\ &\dots \\ A_n &\leq a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \leq B_n \end{aligned}$$

$$V(\Omega) = ?$$

$$u_j = a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n$$

$$A_1 \leq u_1 \leq B_1$$

$$P : \begin{aligned} &\vdots \\ A_n &\leq u_n \leq B_n \end{aligned}$$

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (u_1, \dots, u_n)$$

$$\varphi : \Omega \rightarrow P$$

$$V(\Omega) = \iint_{\Omega} dx_1 \dots dx_n = \iint_P \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| du_1 \dots du_n$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \Rightarrow \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \det(A)$$

$$V(\Omega) = \int_P \frac{1}{|\det(A)|} du = \frac{1}{|\det(A)|} (B_1 - A_1) \dots (B_n - A_n)$$

$$V(P) = |\det A| V(\Omega)$$

**נפח של פירמידה n מימדית**

$$\Omega : \begin{aligned} \frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} &< 1 \\ x_i &> 0, a_i > 0 \end{aligned}$$

$$n = 1 : \frac{x_1}{a_1} \leq 1 \Rightarrow S = a_1: \text{קו ישר}$$

$$n = 2 : \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} < 1 \Rightarrow S = \frac{a_1 a_2}{2}$$

$$: n = 3$$

$$\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} < R$$

$$V(a_1, \dots, a_n, R) = \int dx_1 \dots dx_n = \left\{ \frac{x_i}{R} = u_i \right\} = \int_{\frac{u_1}{a_1} + \dots + \frac{u_n}{a_n} < 1} R^n du_1 \dots du_n = R^n V(a_1, \dots, a_n, 1)$$

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = R^n$$

$$V_n(a_1, \dots, a_n, 1) = \int_{\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} < 1} dx_1 \dots dx_n = \int_0^{a_n} \left( \int_{\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} < 1 - \frac{x_n}{a_n}} dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n$$

$$= \int_0^{a_n} V_{n-1} \left( a_1, \dots, a_{n-1}, 1 - \frac{x_n}{a_n} \right) dx_n$$

$$= \int_0^{a_n} \left( \int_{\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} < 1 - \frac{x_n}{a_n}} dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n = \int_0^{a_n} V_{n-1} \left( a_1, \dots, a_{n-1}, 1 - \frac{x_n}{a_n} \right) dx_n$$

$$= \int_0^{a_n} \left( 1 - \frac{x_n}{a_n} \right)^{n-1} V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}, 1) dx_n$$

$$V_n(a_1, \dots, a_n, 1) = \int_{\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} < 1} dx_1 \dots dx_n$$

$$\left\{ \frac{x_i}{a_i} = t_i \right\}$$

$$= \int_{\substack{t_1 + \dots + t_n < 1 \\ t_i > 0}} a_1 \dots a_n dt_1 \dots dt_n$$

$$= a_1 \dots a_n V(1, \dots, 1)$$

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = a_1 \dots a_n V_n(1, \dots, 1) = a_1 \dots a_n V_n$$

$$V_n = \int_0^1 (1-x)^{n-1} V_{n-1} dx = \frac{1}{n} V_{n-1} \Rightarrow V_n = \frac{1}{n!}$$

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = a_1 \dots a_n V_n = \frac{a_1 \dots a_n}{n!}$$

**נפח של גליל**

$$n = 3 : \Omega = \{(x, y) \in D : 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_D \left( \int_{z=0}^{f(x,y)} dz \right) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy$$

**נפח של גוף סיבובי:**

$$:n = 3$$

$$\int_{[a,b]} \pi f(y) dy = V(\Omega)$$

**אינטגרל לא אמיתי ב  $\mathbb{R}^n$**

נניח כי  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  כך שלכל קבוצה  $K \subset \mathbb{R}^n$  קומפקטית  $f|_K$  חסומה ולכל תחום פשוט  $f|_{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  פשוטה.  $f \in E(\Omega)$ . מוגדר  $\int_{\Omega} f(x) dx$  לכל תחום  $\Omega$  פשוט.

**כיסוי של  $\mathbb{R}^n$**

- 1.  $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}; \Omega_j \subset \mathbb{R}^n$
  - 2.  $\forall j : \Omega_j \subset \Omega_{j+1}$
  - 3.  $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \mathbb{R}^n$
3. לכל קבוצה קומפקטית  $K \subset \mathbb{R}^n$  קיים  $j$  כך ש  $K \subset \Omega_j$ .  
נגדיר עבור  $f > 0$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_j} f(x) dx$$

נגדיר:

$$f^+ = \frac{|f|+f}{2} \geq 0$$

$$f^- = \frac{|f|-f}{2} \geq 0$$

$$f = f^+ - f^-$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx := \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx$$

$$f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$$

**למה:**

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx \text{ לא תלוי בבחירה של הכיסוי } \{\Omega_j\}.$$

**הוכחה**

נניח כי  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega'_j$   
 $\forall j \exists i : \Omega'_j \subset \Omega_i$

$$f \geq 0 : \int_{\Omega'_j} f dx \leq \int_{\Omega_i} f dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f dx$$

ולכן  $(\Omega_j) \int_{\mathbb{R}^n} f dx \leq (\Omega'_j) \int_{\mathbb{R}^n} f dx$  ובנוסף  $(\Omega'_j) \int_{\mathbb{R}^n} f dx \leq (\Omega_j) \int_{\mathbb{R}^n} f dx$

**דוגמא**

$$E = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$$

$$2E = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} RE^2 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{-x^2} dx \int_{-A}^A e^{-y^2} dy \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \int_{-A}^A e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\varphi \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2} e^{r^2} \Big|_0^R \right) 2\pi = \pi \end{aligned}$$

$$E^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow E = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**פונקציה לא חסומה**

$f$  לא חסומה סביבה של  $a$ .  
 כך ש  $\{u_j\}_{j=1}^\infty$  סביבה של  $a$ .  
 $u_{j+1} \subset u_j$

$$\bigcap_{j=1}^\infty u_j = \{a\}$$

$\forall \epsilon > 0 \exists j : u_j \subset B(a, \epsilon)$

נניח  $f$  אינטגרבילית בכל  $\Omega \setminus u_j, f \geq 0, \int_{\Omega \setminus u_j} f dx < \infty$

$$\exists \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus u_j} f(x) dx = \sup_j \int_{\Omega \setminus u_j} f dx := \int_{\Omega} f(x) dx < \infty$$

$$f = f_+ - f_- \Rightarrow \int_{\Omega} f dx = \int_{\Omega} f_+ dx - \int_{\Omega} f_- dx$$

$$\frac{m}{r^\alpha} \leq |f(x)| \leq \frac{M}{r^\alpha}$$

$$r = \|x\|$$

$$\int_{|x| \geq R_0} \frac{1}{r^\alpha} dx = \int_{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}} \int_{R_0}^\infty \frac{1}{r^\alpha} A(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} = c \int_{R_0}^\infty \frac{r^{n-1}}{r^\alpha} dr$$

$\infty: \alpha > n \Leftrightarrow \int_{ x  > R_0} \frac{1}{\ x\ ^\alpha} dx < \infty$
$0: \alpha < n \Leftrightarrow \int_{\ x\  < R_0} \frac{1}{\ x\ ^\alpha} dx < \infty$