

## תרגיל 6 מרוכבות

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות הסגורות הן נגד כיוון השעון)

(א)

$$\int_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

(ב)

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2} dz$$

2. תהי  $f(z)$  פונקציה שלמה המקיימת כי עבור  $M > 0$  כלשהוא. הוכיחו כי  $f(z)$  היא פולינום ממעלה  $n$  לכל היותר. רמז: חזרו על ההוכחה של משפט ליוביל.

3. מצאו את כל נקודות המקסימום (הגלובאליות) של הפונקציה

$$f(z) = z^2 - 3z + 2$$

בעיגול  $\{z \mid |z| \leq 1\}$

הדרכה: כתבו  $z = x + iy$  (והשתמשו כמובן בעקרון המקסימום).

4. תהי  $f(z)$  אנליטית בעיגול היחידה (כלומר ב  $\{z \mid |z| < 1\}$ ) עם התכונה שלכל  $z$  כך ש  $0 < |z| < 1$  מתקיים ש  $|f(z)| \leq \ln \frac{1}{|z|}$ . הוכיחו כי  $f$  היא פונקציית האפס.

5. תהי  $f(z)$  אנליטית בפנים של העיגול  $\{z \mid |z - a| = R\}$ . כמו כן  $f$  חסומה על השפה של המעגל. נסמן ב  $M$  חסם, כלומר  $|f(z)| \leq M$  לכל  $z$  כך ש  $|z - a| = R$ . הוכיחו כי

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n}$$