תרגיל 6

להגשה עד 18.12.17

שאלה 1

יהי $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ מרחב מידה חיובית וסופית.
לכל שתי פונקציות f, g מדידות נגדיר: $d(f,g) := \int_\Omega \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$.

1. הראו ש־ d כנ"ל מהווה מטריקה על מרחב הפונקציות המדידות $J(\Omega)$ תחת יחס השקילות: $f \sim g \Leftrightarrow f \overset{a.e.}{=} g$.
2. הראו שמתקיים $d(f_n, g) \to 0$ אם ורק אם $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

שאלה 2

תהי $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות מדידות אי שליליות מעל ממ"ח, כך ש־ $f_n \searrow f$, וקיים $N \in \mathbb{N}$ עבורו: $\int_\mathbb{X} f_N d\mu < \infty$.
הוכיחו כי: $\int_\mathbb{X} f_n d\mu \to \int_\mathbb{X} f d\mu$

שאלה 3

יהי (X, S, μ) ממ"ח σ־סופי. ונניח כי $f : X \to \mathbb{R}$ הינה אינטגרבילית ואי שלילית.
הוכיחו כי לכל $\epsilon > 0$ קיימת $A_\epsilon \in S$ כך ש $\mu(A_\epsilon) < \infty$ ו־ $\int_X f d\mu > \epsilon + \int_{A_\epsilon} f d\mu$.

שאלה 4

יהי $(X, \mathbb{A}, \mu)$ מרחב מידה חיובית σ־סופית, ותהי f פונקציה אי שלילית, מדידה־μ, המקיימת: $\int_X f\, d\mu = \infty$.
הראו שלכל $M > 0$ קיימת פונקציה g מדידה־μ, כך ש: $0 \le g(x) \le f(x)$ (כב"מ), המקיימת את התנאים:

1. $\int_X g\, d\mu \ge M$.
2. g חסומה (כב"מ).
3. $\mu([g \neq 0]) < \infty$.

שאלה 5

תהי $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת $g(x) = g(x+1)$ לכל $x \in \mathbb{R}$, ובנוסף: $\int_0^1 g(x)dx < \infty$. נגדיר:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(nx)}{n^2}$$

הראו ש f סופית כב"מ.