פיתרון בוחן שני בדידה 2, 83-118, סמסטר ב, תשע"ו

כ"ב אייר, 30/05/2016

מתרגל: אריאל ויצמן.

- מבנה הבוחן וניקוד: בבוחן 4 שאלות, **ענו על 3 שאלות בלבד מתוכן**. כל שאלה מזכה ב-34 נקודות. לא ניתן לצבור יותר מ-100 נקודות בסה"כ.
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.**
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
סה"כ	

בהצלחה!

1. יהיו $k,n\in\mathbb{N}$ הוכיחו:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{i}=\binom{n+k+1}{k}$$

א. בדרך אלגברית. (17 נקודות)

ב. בדרך קומבינטורית. (רמז: כמה מספרים עם לכל היותר n ספרות יש שסכום הספרות הוא 8?) (17 נקודות)

פיתרון

א. באינדוקציה על k. עבור $k=0$ מקבלים $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$ ששניהם שווים ל־1. נניח נכונות עבור $m<k$ ונוכיח עבור k: נשים לב שלפי זהות פסקל מתקיים:

$$\binom{n+k+1}{k}=\binom{n+k}{k-1}+\binom{n+k}{k}\overset{*}{=}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+i}{i}+\binom{n+k}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{i}$$

כאשר המעבר $*$ נעשה בזכות הנחת האינדוקציה.

ב. כמה מספרים עם לכל היותר n ספרות יש שסכום הספרות הוא 8? ראינו בבוחן הקודם שזה יוצא $\binom{n+7}{8}$. אבל מצד שני ניתן להסתכל על זה באופן הבא: זה כל המספרים בעלי ספרה אחת שסכומם 8, ועוד כל המספרים בעלי שתי ספרות (שהשמאלית לפחות 1) שסכומן 8, וכו' עד כל המספרים בעלי n ספרות (שוב שהשמאלית לפחות 1) שסכום הספרות 8. נקבל: $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+7}{i}=\sum_{i=1}^{n}\binom{i+7-1}{i-1}=\sum_{i=1}^{n}\binom{i+7-1}{7}$.

ובאותו אופן רק בכלליות: כמה פתרונות יש למשוואה $\sum_{i=0}^{n}x_i=k$? תשובה: $\binom{n+k-1}{k}$. ואם נסתכל על זה כמו הדרך השניה נקבל $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+(k-1)}{i}$. לכן, כעת נחשוב על מספר הפתרונות למשוואה עם $k+1$ משתנים (במקום n משתנים), שסכום הספרות הוא $n+1$ (במקום k), נקבל מצד אחד שזה: $\binom{n+k+1}{k}=\binom{(k+1)+(n+1)-1}{n+1}$, ומאידך לפי הפיתוח שראינו נקבל שזה $\sum_{i=0}^{k}\binom{n+i}{i}$.

2. חידת הארנבים: זוג ארנבים מוליד בכל חודש, החל מהחודש השני לחייו, זוג ארנבים נוסף. זוג ארנבים בני יומם הוכנסו לחדר סגור בחודש ה־0. כמה זוגות ארנבים יהיו בחדר בחודש ה־n (בהנחה שאף אחד לא מת שם.)? (34 נקודות)

פיתרון

התשובה לשאלה זו היא $F(n)$. נוכיח באינדוקציה: בסיס האינדוקציה: בחודש 0 יש רק את הזוג הראשון ובחודש 1 עדיין רק הוא נמצא כי טרם הגיע לגיל ההולדה. מתאים לכך ש־ $F(0) = F(1) = 1$. נניח נכונות לכל $k < n$ ונראה שבדור ה־n יש $F(n)$ זוגות. נשים לב שמספר הזוגות ברי ההולדה בחודש ה־n הוא כמספר הזוגות הכללי בחודש ה־$n-1$, כי כל זוג מהחודש הקודם עודנו חי, שזה, לפי הנחת האינדוקציה, $F(n-1)$. כמה זוגות שאינם ברי הולדה יש בחודש ה־n? אלה שאינם ברי הולדה, הם אלה שנולדו מברי ההולדה בחודש ה־$n-1$, שזה, כפי שראינו, כמספר הזוגות בחודש שלפניו, כלומר $F(n-2)$ מהנחת האינדוקציה. בסה"כ מספר הזוגות הוא מספר ברי ההולדה ועוד מספר שאינם ברי הולדה, שזה: $F(n-1)+F(n-2)$, כדרוש.

3. עץ בינארי מוגדר ברקורסיה באופן הבא: עץ בינארי הוא אחד משני הדברים הבאים:

א. עץ ריק.

ב. קודקוד שנקרא "שורש" ולו יש שני "בנים", אחד ימני ואחד שמאלי, שכל אחד מהם הוא עץ בינארי.

כמה עצים בינאריים בעלי n קודקודים יש? (34 נקודות)

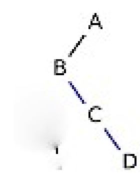
פיתרון

התשובה היא מספר קטלן $C(n)$. נראה התאמה חח"ע ועל בין העצים הבינאריים בעלי n קודקודים לבין מחרוזות סוגריים מאוזנות: נעבור על העץ באופן הבא: נתחיל מהשורש, נטפל בתת העץ השמאלי שלו, נחזור לשורש ואז נטפל בתת העץ הימני שלו. במהלך המעבר, כל הגעה ראשונית לקודקוד תמופה לסוגר שמאלי (פותח), וכל חזרה לקודקוד, אחרי טיפול בתת העץ השמאלי שלו, תמופה לסוגר ימני (סוגר). ההתאמה ההופכית תהיה: הסוגר השמאלי הראשון ממופה לשורש, ואז, כל עוד הוא פתוח אנו בונים את תת העץ השמאלי שלו באותו אופן (ההתאמה רקורסיבית), עד סגירתו שזה בעצם חזרה לשורש, ואז בונים את תת העץ הימני שלו עם המשך הסוגריים באותו אופן.

למשל מחרוזת הסוגריים הבאה:

$$(()()())$$

תתאים לעץ הבינארי הבא:



כי: פותחים סוגר שמאלי של השורש. הוא נשאר פתוח עד הסוף, זאת אומרת שאין תת עץ ימני (כי אליו מגיעים רק אחרי שסוגרים את השורש), ואז פותחים את הבן השמאלי ומיד סוגרים ־ זאת אומרת שאין בן שמאלי. וכנ"ל לשניים הבאים אין בן שמאלי.

דרך נוספת: לכל $0 \leq i \leq n-1$, לשורש יכולים להיות i קודקודים בתת העץ השמאלי ו־$n-i-1$ קודקודים בתת העץ הימני. במקרה זה נקבל שכמות העצים היא $C(i) \cdot C(n-i-1)$, ולכן בסה"כ צריך לסכום ולקבל שכמות העצים עם n קודקודים היא:

$$\sum_{i=0}^{n-1} C(i) \cdot C(n-i-1)$$

שזהו מספר קטלן $C(n)$.

4. יהיו $2 \le k \le n \in \mathbb{N}$, הוכיחו כי

$$\left\{ n \atop k \right\} = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left\{ i \atop k-1 \right\}$$

(34 נקודות)

פיתרון:

נחלק את $[n]$ ל־k תתי קבוצות זרות לא ריקות באופן הבא: לכל מספר $k-1 \le i \le n-1$ נבחר מתוך $[n-1]$ תת קבוצה מגודל i, שזה ניתן להיעשות ב־$\binom{n-1}{i}$ אפשרויות. את תת הקבוצה שנבחרה נחלק ל־$k-1$ תתי קבוצות זרות לא ריקות ב־$\left\{ i \atop k-1 \right\}$ אפשרויות, ושאר האיברים יהיו בתת קבוצה נוספת יחד עם n. שימו לב שאני תמיד משאיר את n לתת הקבוצה "האחרונה" ולא מאפשר לבחור אותו כחלק מ־i האיברים שמחלקים ל־$k-1$ תתי קבוצות, כדי למנוע כפילויות.