

אינפי 1 – מתמטיקה – פתרון תרגיל 3

1. מצאו את החלק הסטנדרטי של המספרים הבאים (או הסבירו מדוע לא קיים חלק סטנדרטי).

$$i. \text{ באשר } H \text{ אינסופי, } \epsilon \text{ אינפיניטסימלי. } \frac{2H^2 - H + 5\epsilon}{3H^2 + 5H - 6 - 4\epsilon}$$

$$st\left(\frac{2H^2 - H + 5\epsilon}{3H^2 + 5H - 6 - 4\epsilon}\right) = st\left(\frac{2 - \frac{1}{H} + \frac{5\epsilon}{H^2}}{3 + \frac{5}{H} - \frac{6}{H^2} - \frac{4\epsilon}{H^2}}\right) = \frac{st(2) - st\left(\frac{1}{H}\right) + st\left(\frac{5\epsilon}{H^2}\right)}{st(3) + st\left(\frac{5}{H}\right) - st\left(\frac{6}{H^2}\right) - st\left(\frac{4\epsilon}{H^2}\right)} = \frac{2 - 0 + 0}{3 + 0 - 0 - 0} = \frac{2}{3}$$

להלן נקצר צורת כתיבה מלאה זו, ונקפוץ ישר מהשלב השני לשלב האחרון.

$$ii. \text{ באשר } H \text{ אינסופי. } \frac{(2H+1)^3 - 2H - 4}{(H-5)^3 + 4}$$

$$. st\left(\frac{(2H+1)^3 - 2H - 4}{(H-5)^3 + 4}\right) = st\left(\frac{8H^3 + \dots}{H^3 + \dots}\right) = st\left(\frac{8 + \epsilon}{1 + \delta}\right) = \frac{8}{1} = 8$$

הסבר לחישוב לעיל: הביטוי הגדול ביותר במונה הוא $8H^3$ ובמכנה H^3 . לא כתבנו את שאר הגורמים אלא החלפנו אותם ב "...". כיוון שתכף אנחנו מחלקים ב- H^3 והם יהפכו להיות אינפיניטסימליים ϵ, δ , לכן המספרים המדויקים המופיעים שם לא חשובים לנו. כל שחשוב שהם מסדר גודל יותר קטן מ- H^3 .

$$iii. \text{ באשר } H \text{ אינסופי. } \frac{(9H-8)^5 - (7H-6)^4}{12 + 14H^6}$$

לאחר פתיחת סוגריים במונה נקבל כי החזקה הגבוהה ביותר היא H^5 ובמכנה היא H^6 , כלומר כפי שכבר ראינו פעמים רבות, ע"י חילוק ב- H^6 נקבל כי המספר הוא אינפיניטסימל ובפרט החלק הסטנדרטי שלו הוא 0.

$$iv. \text{ באשר } \frac{9-a}{3-\sqrt{a}} \text{ כאשר } a \approx 3, a \neq 3$$

$$st\left(\frac{(3-\sqrt{a})(3+\sqrt{a})}{3-\sqrt{a}}\right) = st(3+\sqrt{a}) = st(3) + st(\sqrt{a}) = 3 + \sqrt{3}$$

$$v. \text{ באשר } \frac{64-2a}{(8-a)(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a})} \text{ כאשר } a \approx 32, a \neq 32$$

$$st\left(\frac{64-2a}{(8-a)(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a})}\right) = \frac{st(64-2a)}{st((8-a)(\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}))} = \frac{64-64}{(8-32)(\sqrt{32}-\sqrt[3]{32})} = 0$$

$$vi. \text{ באשר } H \text{ אינסופי. } \sqrt{H+12} - \sqrt{H-24}$$

$$\begin{aligned} st(\sqrt{H+12}-\sqrt{H-24}) &= st\left(\frac{(\sqrt{H+12}-\sqrt{H-24})(\sqrt{H+12}+\sqrt{H-24})}{\sqrt{H+12}+\sqrt{H-24}}\right) = st\left(\frac{(H+12)-(H-24)}{\sqrt{H+12}+\sqrt{H-24}}\right) = \\ &= st\left(\frac{36}{\sqrt{H+12}+\sqrt{H-24}}\right) = st\left(\frac{\frac{36}{\sqrt{H}}}{\sqrt{1+\frac{12}{H}}+\sqrt{1-\frac{24}{H}}}\right) = \frac{0}{1+1} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{vii. } \epsilon \approx 0, \epsilon \neq 0 \text{ באשר } \frac{\sqrt{36-\epsilon}-6}{16\epsilon}$$

$$st\left(\frac{\sqrt{36-\epsilon}-6}{16\epsilon}\right) = st\left(\frac{(\sqrt{36-\epsilon}-6)(\sqrt{36-\epsilon}+6)}{16\epsilon(\sqrt{36-\epsilon}+6)}\right) = st\left(\frac{-\epsilon^2}{16\epsilon(\sqrt{36-\epsilon}+6)}\right) = st\left(\frac{-\epsilon}{16(\sqrt{36-\epsilon}+6)}\right) = \frac{0}{16(6+6)} = 0$$

$$\text{viii. } \epsilon \approx 0 \text{ באשר } 33554432\epsilon$$

$$st(33554432\epsilon) = st(33554432)st(\epsilon) = 33554432 \cdot 0 = 0$$

$$\text{ix. } \epsilon \approx 0, \epsilon > 0 \text{ באשר } \frac{1}{\epsilon}\sqrt{\epsilon}$$

$$\text{. זהו מספר אינסופי לכן אין לו חלק סטנדרטי. } st\left(\frac{1}{\epsilon}\sqrt{\epsilon}\right) = st\left(\frac{1}{(\sqrt{\epsilon})^2}\sqrt{\epsilon}\right) = st\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$$

$$\text{x. } \epsilon \approx 0, \epsilon \neq 0 \text{ באשר } \frac{\epsilon-5}{4\epsilon+12\epsilon^2}$$

גם כאן זהו מספר אינסופי (המונה משמעותי, המכנה אינפיניטיסימלי) לכן אין לו חלק סטנדרטי.

2. הוכיחו כי אם $a \approx b$ וכן $b \approx c$ אז $a \approx c$.

$a \approx b$ כלומר $a-b \approx 0$. וכן $b \approx c$ כלומר $b-c \approx 0$. ראינו כי ניתן לחבר "שוויונות" אלו כלומר:
 $(a-b) + (b-c) \approx 0+0$ כלומר $a-c \approx 0$ ז"א $a \approx c$ כדרוש.

3. הוכיחו כי לא קיים מס' אינסופי H ומס' ממשי r כך ש- $H \approx r$.

נניח בשלילה שקיימים H אינסופי ו- r ממשי כך ש- $H \approx r$, כלומר $H-r$ אינפיניטיסימלי, כלומר $x < H-r < x$ לכל x ממשי. כלומר $H < r+x$ לכל x ממשי, כלומר H איננו אינסופי חיובי (כי אינסופי חיובי גדול מכל מס' ממשי) וכן $H > r+x$ לכל x ממשי, כלומר H איננו אינסופי שלילי (כי אינסופי שלילי קטן מכל מס' ממשי), סתירה.

4. הוכיחו או הפריכו:

$$\text{i. } a \approx b \text{ , באשר } a \text{ איננו אינפיניטיסימלי, אז } \frac{1}{a} \approx \frac{1}{b}$$

הטענה נכונה.

ראשית נשים לב כי גם b איננו אינפיניטיסימלי, כי לו b היה אינפיניטיסימלי כלומר $b \approx 0$ היינו מקבלים $a \approx b \approx 0$ כלומר $a \approx 0$ (מתרגיל 2 לעיל) סתירה.

צריך להראות כי $\frac{1}{a} \approx \frac{1}{b}$ כלומר כי $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \approx 0$ כלומר כי $\frac{b-a}{ab} \approx 0$. המונה הוא אינפיניטיסימלי (כי $a \approx b$ לכן $a-b \approx 0$).

כמו כן המכנה איננו אינפ'י כי a איננו אינפ'י וכן b איננו אינפ'י. כפי שלמדנו, אינפ'י חלקי מס' שהוא משמעותי או אינסופי הוא אינפ'י. ע"כ אכן $\frac{b-a}{ab} \approx 0$ כדרוש.

ii. אם $a \approx b$, באשר $a \neq 0, b \neq 0$, אז $\frac{1}{a} \approx \frac{1}{b}$.

הטענה לא נכונה. יהי ϵ אינפ'י חיובי כלשהו ונבחר $a = \epsilon, b = 2\epsilon$. ברור כי $a \approx b$ (כי שניהם אינפ'י). כמו כן $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2\epsilon} = \frac{2-1}{2\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon}$. זהו מס' אינסופי (חילוק של מס' משמעותי במס' אינפ'י). כלומר הראנו כי $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ הוא אינסופי, ובפרט הוא איננו אינפ'י, כדרוש.

5. מצאו את הנגזרות של הפונקציות הבאות, לפי הגדרה:

i. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

יהי $\Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0$. נחשב את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{3(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 1 - (3x^2 - 2x + 1)}{\Delta x} = \frac{3x^2 + 6x\Delta x + \Delta x^2 - 2x - 2\Delta x + 1 - 3x^2 + 2x - 1}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x + \Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = 6x + \Delta x - 2$$

כעת נוכל לקחת חלק סטנדרטי:

$$st(6x + \Delta x - 2) = st(6x) + st(\Delta x) - st(2) = 6x + 0 - 2 = 6x - 2$$

ii. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

יהי $\Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0$. נחשב את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}}{\Delta x} = \frac{\frac{x^2 + 1 - ((x+\Delta x)^2 + 1)}{(x^2 + 1)((x+\Delta x)^2 + 1)}}{\Delta x} = \frac{\frac{x^2 + 1 - x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2 - 1}{(x^2 + 1)((x+\Delta x)^2 + 1)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-2x\Delta x - \Delta x^2}{(x^2 + 1)((x+\Delta x)^2 + 1)}}{\Delta x} = \frac{-2x - \Delta x}{(x^2 + 1)((x+\Delta x)^2 + 1)}$$

כעת נוכל לקחת חלק סטנדרטי:

$$st\left(\frac{-2x - \Delta x}{(x^2 + 1)((x+\Delta x)^2 + 1)}\right) = \frac{st(-2x - \Delta x)}{st((x^2 + 1)((x+\Delta x)^2 + 1))} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)(x^2 + 1)} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

iii. $f(x) = \sqrt{6x^2 + x + 6}$

יהי $\Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0$. נחשב את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}-\sqrt{6x^2+x+6}}{\Delta x} = \\
& = \frac{(\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}-\sqrt{6x^2+x+6})(\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6})}{\Delta x(\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6})} = \\
& = \frac{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6-6x^2-x-6}{\Delta x(\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6})} = \\
& = \frac{6x^2+12x\Delta x+6\Delta x^2+x+\Delta x+6-6x^2-x-6}{\Delta x(\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6})} = \\
& = \frac{12x\Delta x+6\Delta x^2+\Delta x}{\Delta x(\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6})} = \\
& = \frac{12x+6\Delta x+1}{\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6}}
\end{aligned}$$

כעת נוכל לקחת חלק סטנדרטי:

$$\begin{aligned}
st\left(\frac{12x+6\Delta x+1}{\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6}}\right) &= \frac{st(12x+6\Delta x+1)}{st(\sqrt{6(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+6}+\sqrt{6x^2+x+6})} = \\
&= \frac{12x+1}{\sqrt{6x^2+x+6}+\sqrt{6x^2+x+6}} = \frac{12x+1}{2\sqrt{6x^2+x+6}}
\end{aligned}$$