תרגיל בית מס' 6

17 בדצמבר 2012

1. תהי G חבורה. לכל $g \in G$, נגדיר את פונקציית הצמדה על ידי g מ G ל G באופן הבא: $x \mapsto x^g = gxg^{-1}$. הוכיחו שהצמדה על ידי g היא איזומורפיזם.

2. יהי $\phi : G \mapsto H$ הומומורפיזם של חבורות. הראו כי $\phi : G \mapsto Im\phi$ הוא אפימורפיזם.

3. יהי $\phi : G \mapsto H$ איזומורפיזם של חבורות. הוכיחו ש $\phi^{-1} : H \mapsto G$ גם הוא איזומורפיזם של חבורות.

4. יהי $\phi : G \mapsto H$ איזומורפיזם של חבורות. הוכיחו שלכל תת־חבורה $N \leq G$ מתקיים $N \trianglelefteq G \Leftrightarrow \phi(N) \trianglelefteq H$. (במילים אחרות - איזומורפיזם שומר על נורמליות).

5. יהיו m, n מספרים זרים. הוכיחו $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

6. תהי C_n חבורה ציקלית מסדר n.

   (א) כמה יוצרים שונים יש ל C_n? במילים אחרות, כמה איברים שונים $g \in C_n$ מקיימים $\langle g \rangle = C_n$.

   (ב) הראו, לכל $m \mid n$ קיימת תת־חבורה יחידה של C_n מסדר m.

7. תהי G חבורה.

   (א) יהי $g \in G$ קבוע. נגדיר העתקה $f : G \to G$ על ידי $f(x) = x^g = gxg^{-1}$. הוכיחו כי זה הומומורפיזם, אבל איננו בהכרח איזומורפיזם.

   (ב) תהי $H \leq G$, Γ קבוצה יוצרת של G, Aקבוצה יוצרת של H. הוכח כי H נורמלית אם ורק אם לכל $\gamma \in \Gamma$, $a \in A$ מתקיים $\gamma a \gamma^{-1} \in H$.

8. אנו מגדירים את המרכז של חבורה $Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G, xg = gx\}$.

   (א) הוכיחו את המשפט: לכל G, $Z(G)$ היא תת־חבורה נורמלית של G.

   (ב) הראו שעל מנת לדרוש שאיבר יהיה במרכז מספיק לדרוש חילופיות עם היוצרים של G.

   (ג) בעזרת סעיף הקודם, מצאו את המרכז של D_n. (רמז: חשבו בנפרד עבור n זוגי ואי־זוגי).

   (ד) נזכיר כאן משפט: G אבלית $\Leftrightarrow G/Z(G)$ ציקלית. האם נכונה ההכללה הבאה: G אבלית $\Leftrightarrow G/Z(G)$ אבלית?

9. נגדיר חבורת קווטרניונים Q_8 באופן הבא: $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. הכפל מוגדר באופן הבא:

- $1 \cdot (\pm i, \pm j, \pm k) = (\pm i, \pm j, \pm k) = (\pm i, \pm j, \pm k) \cdot 1$.
- $(-1) \cdot (\pm i, \pm j, \pm k) = (\mp i, \mp j, \mp k) = (\pm i, \pm j, \pm k) \cdot (-1)$
- $ij = -ji = k$
- $jk = -kj = i$
- $ki = -ik = j$

כל שאר ההכפלות נובעות מאסוציטיביות.

(א) מלאו את טבלת הכפל של Q_8.

(ב) מצאו את המרכז של Q_8.

(ג) הוכיחו/הפריכו: אם כל תת־חבורה של G היא נורמלית, אזי G אבלית.

10. בכל סעיף קבעו אילו מבין החבורות הן איזומורפיות. הסבירו קביעתכם.

(א) $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ ו $\mathbb{Z}_{35}$.

(ב) $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ ו $\mathbb{Z}_{49}$

(ג) $\mathbb{R}$ ו $\mathbb{R}^*$.

(ד) $\mathbb{R}$ ו $\mathbb{R}^+$. (ממשיים חיוביים עם פעולת כפל).

רמז: תזכרו בפונקציות מאינפי. (אילן בר־אילן!)

(ה) S_4 ו D_{12}.

(ו) D_4 ו Q_8.