

תרגיל בית מספר 8

מתרגלים: חעי בן-ארי ולידור אלדב

1. תהיינה קבוצות אינסופיות A, B זרות כך ש $a \geq b, |A| = a, |B| = b$. מצאו את העוצמות הבאות

וכתבו בצורה הפשוטה ביותר:

א. $|P(A) \cup P(B)|$

ב. $|A \times P(A) \times P(P(A))|$

ג. $|A^{B^{A \times B}}|$

ד. $|A \setminus (B \times A)|$

2. מצאו את העוצמות של הקבוצות הבאות, והוכיחו:

א. $\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ (קבוצת המספרים המרוכבים)

ב. $M_3(\mathbb{Q})$ (כל המטריצות 3 על 3 עם ערכים מ \mathbb{Q})

• תהי קבוצה A , פולינום מעל A במשתנה x הוא ביטוי מהצורה $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ כאשר $n \in \mathbb{N}$ ו $a_n, \dots, a_0 \in A$. נגדיר את הקבוצה $A[x] := \{\text{polynoms over } A\}$ (קבוצת כל הפולינומים מעל A).

ג. $\mathbb{Q}[x]$

ד. $C_0 := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is continues}\}$ (קבוצת כל הפונקציות הרציפות מ \mathbb{R} ל \mathbb{R})

רמז: היעזרו בעובדה שכל נקודה ב \mathbb{R} היא גבול של נקודות מ \mathbb{Q} .

3. נגדיר יחס שקילות \approx על הקבוצה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (קבוצה הפונקציות $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) באופן הבא:

$$f \approx g \iff f - g \text{ רציפה. (לדוגמה, } x \approx 3x \text{ כי } 2x \text{ רציפה).}$$

א. הוכיחו כי \approx הוא יחס שקילות (אין צורך להוכיח טענות מאינפי על אריתמטיקה של פונקציות רציפות).

ב. תהי פונקציה $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. מצאו את $|[f]_{\approx}|$. (רמז: עיון בשאלה הקודמת לא יכול להזיק).

ג. מצאו את $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \approx|$.

4. סדרה חשבונית a_n ב \mathbb{Z} היא סדרה המקיימת $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n = d$ כאשר $d \in \mathbb{Z}$ קבוע.

דוגמה: $2, -1, -4, -7, -10, \dots$ (במקרה זה $a_0 = 2$ ו $d = -3$).

נגדיר:

$$Seq(\mathbb{Z}) := \{a_n \mid a_n \text{ is an arithmetic sequence}\}$$

א. מצאו את $|Seq(\mathbb{Z})|$.

ב. דני וחיים משחקים משחק: דני ממקם צפרדע בזמן $t = 0$ בנקודה כלשהי ב \mathbb{Z} . הצפרדע בכל צעד קופצת

d צעדים ימינה (כאשר $d \in \mathbb{Z}$ קבוע, ואם הוא שלילי המשמעות היא קפיצה שמאלה). נסמן את סדרת

המיקומים של הצפרדע ב t_n . חיים בכל צעד מנחש את מיקומה של הצפרדע. אם חיים מצליח בניחושו בזמן

כלשהו הוא מנצח, אם הוא נכשל תמיד אז דני מנצח. מצאו אסטרטגיה מנצחת עבור חיים (כלומר שיטה שאם

ינקוט בה תמיד ינצח).

רמז: סעיף א' יכול לעזור.