פתרון מועד א תשעח

1. בהרצאה.
2. יש טעות בשאלה. צריך לתקן $u = x - \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} y$. פתרון בשיעורי בית.
3.

(א) מחישוב ישיר

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

נחשב את הפ"א

$$p_B(x) = \left|\begin{pmatrix} x-10 & 0 & -2 \\ 0 & x-10 & -4 \\ -2 & -4 & x-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} x-10 & 0 & -2 \\ -2(x-10) & x-10 & 0 \\ -2 & -4 & x-2 \end{pmatrix}\right| = (x-10)\left|\begin{pmatrix} x-10 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & x-2 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (x-10)\left|\begin{pmatrix} x-10 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & -4 & x-2 \end{pmatrix}\right| = (x-10)\left|\begin{pmatrix} x-10 & -2 \\ -10 & x-2 \end{pmatrix}\right| = (x-10)\left[(x-10)(x-2)-20\right]$$
$$= (x-10)\left[x^2-12x\right] = x(x-10)(x-12)$$

לכן יש שלושה ע"ע שהם $\{\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 10, \lambda_1 = 12\}$. נחשב ו"ע ע"י חישוב מ"ע:

:$V_0 = N(B)$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & -20 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4/10 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/10 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$V_0 = \left\{\begin{pmatrix} -2/10t \\ -2/5t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}\right\}$$

:$V_{10} = N(B-10I)$

$$B - 10I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$V_{10} = \left\{\begin{pmatrix} -2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

:$V_{12} = N(B - 12I)$

$$B - 12I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן

$$V_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נמצא בסיסים או"נ למ"ע ע"י הפעלת גרם שמדיט על הבסיסים של המרחבים ונקבל כי $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{120}} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס או"נ ל $\mathbb{R}^3$ (כי בנוסף לגרם שמידט שביצענו, ידוע כי ו"ע של ע"ע הם או"ג). לכן

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{120}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{\sqrt{120}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{10}{\sqrt{120}} \end{pmatrix}$$

היא מטריצה או"ג המקיימת

$$V^T B V = \begin{pmatrix} 12 & & \\ & 10 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

(ב) לפי התיאוריה, V היא המטריצה מסעיף הקודם ו $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{120}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{\sqrt{120}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{10}{\sqrt{120}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{6}} & \frac{7}{\sqrt{5}} \\ \frac{6}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$U = \left(\frac{Av_1}{\sqrt{12}}, \frac{Av_2}{\sqrt{10}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{12}} & \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{10}} \\ \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{7}{5\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

אפשר לוודא כי $V^T V = I$ וגם $U^T U = I$

(ג) לכל $i \in \{1, 2\}$ מתקיים כי $A^T A v_i = \lambda_i v_i$ ולכן אם נגדיר $x_i = \frac{Av_i}{\lambda_i}$ נקבל כי $A^T x_i = v_i$ לכן $v_i \in C(A^T) = R(A)$ לכן $span\{v_1, v_2\} \subseteq R(A)$ כיוון שהם מימד 2 ואחד מוכל בשני הם שווים ($span\{v_1, v_2\}$ מימד 2 כי v_1, v_2 או"נ ובפרט בת"ל, $R(A)$ מימד 2 כי למטריצה 2 שורות והם בת"ל).

(ד) מתקיים לפי התיאוריה כי העמודה השלישית ב V היא בסיס למרחב האפס של A. מרחב האפס של A הוא מימד 1 (כי $\dim N(A) = 3 - rank(A) = 3 - 2 = 1$) ולכן $N(A) = span\{u\}$ עבור $u \neq 0$כל שהוא מנורמל. טענה: העמודה השלישית של V היא אחת מבין $\{u, -u\}$. הוכחה: נניח כי העמודה השלישית של Vהיא w אזי $w \in N(A)$ לפי התיאוריה ולכן $w = \alpha u$ עבור סקלאר כלשהוא $\alpha \in \mathbb{R}$. כיוון ש V או"ג אז בפרט w נורמלי ומתקיים $\|w\| = 1$. לכן נקבל

$$1 = \|w\| = \|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\| = |\alpha|$$

ולכן $\alpha \in \{\pm 1\}$ ולכן $w = \pm u$. לסיום נעיר כי אכן שני האפשרויות $\pm u$ יכולות לשמש כעמודה שלישית של V כי זהו בסיס מנורמל ל $N(A)$.

(ה) $C = AA^T = \left(U\Sigma V^T\right)\left(U\Sigma V^T\right)^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$. לכן C הפיכה כמכפלה של הפיכות (U, U^T או"ג ובפרט הפיכות ו $D = \Sigma\Sigma^T = \begin{pmatrix} 12 & \\ & 10 \end{pmatrix}$ הפיכה כי הדט' שלה שווה 120ששונה מאפס) ולכן גם C^{10} הפיכה כמכפלה של הפיכות. כעת

$$C^{10} = \left(UDU^T\right)^{10} = UD^{10}U^T$$

ולכן

$$\left(C^{10}\right)^{-1} = \left(UD^{10}U^T\right)^{-1} = \left(U^T\right)^{-1}\left(D^{10}\right)^{-1}U^{-1} = U\begin{pmatrix} \frac{1}{12^{10}} & \\ & \frac{1}{10^{10}} \end{pmatrix}U^T$$

.4

(א) נניח בשלילה כי קיימת ה"ל $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ כך ש $ImT = \ker T$ בפרט $\dim ImT = \dim\ker T$ נסמן מספר זה ב a. לפי משפט הדרגה נקבל כי

$$5 = \dim\mathbb{R}^5 = \dim ImT + \dim\ker T = 2a$$

מה שגורר כי $a = \frac{5}{2}$ אבל a מספר שלם. סתירה.

(ב) נגדיר $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ע"י משפט ההגדרה

$$\begin{aligned} e_1 &\mapsto e_3 \\ e_2 &\mapsto e_4 \\ e_3 &\mapsto 0 \\ e_4 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

כאשר e_iאלו וקטורי היחידה. במפורש

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

ואז

$$\begin{aligned} \ker T &= \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = 0\right\} = \\ &= \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a = b = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : c, d \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{e_3, e_4\right\} \end{aligned}$$

וגם

$$ImT = span\left\{Te_1, Te_2, Te_3, Te_4\right\} = span\left\{e_3, e_4, 0, 0\right\} = span\left\{e_3, e_4\right\}$$

.5

(א) נניח קיים m טבעי כך ש $A^m = 0$. טענה: אם ל A יש ע"ע אז הוא אפס.
הוכחה: יהא λ ע"ע של A אזי λ^m ע"ע של A^m (משיעורי בית) אבל $A^m = 0$ ולכן יש לה ע"ע יחיד 0 ולכן $\lambda^m = 0$ מה שמכריח $\lambda = 0$.
כעת, נניח בשלילה כי $I - A$ אינה הפיכה לכן $|I - A| = 0$ לכן $p_A(1) = |I - A| = 0$ לכן 1 ע"ע של A. סתירה.

(ב) נוכיח טענה שקולה: אם $AB = 0$ אז $rank(A) + rank(B) \leq n$. נניח $AB = 0$ אז לכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים כי $0 = C_j(AB) = AC_j(B)$ ולכן $C_j(B) \in N(A)$. מכאן ש $C(B) \subseteq N(A)$ ומתקיים $\dim C(B) \leq \dim N(A)$. נצרף את משפט הדרגה לקבל

$$rank(A)+rank(B) = \dim C(A)+\dim C(B) \leq \dim C(A)+\dim N(A) = n$$

כנדרש.

(ג) נתון כי A, B דומות ולכן קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP = B$ ומתקיים כי $\det(A) = \det(B)$ (למטריצות דומות אותו דטר'). בנוסף, כיוון שהם מטריצות הפיכות מתקיים כי

i. $B^{-1} = \left(P^{-1}AP\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$.

ii. $adj(A) = \det(A)A^{-1}$ (מהמשפט כי $A \cdot adj(A) = \det A \cdot I$ נקבל כי $A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det A}$ או $adj(A) = \det A \cdot A^{-1}$) וכנ"ל עבור B. לכן, בצירוף כל הדברים נקבל כי

$$P^{-1}adj(A)P = P^{-1}\det(A)A^{-1}P = \det(A)\cdot P^{-1}A^{-1}P = \det(B)\cdot B^{-1} = adj(B)$$

כנדרש.