בוחן אלגברה לינארית 2 תיכונסטים תשעט

.

מתרגלים: אחיה בר־און, עוזי חרוש, לירז כתיב.

- ענו על כל השאלות.
- **במידה ואתם עונים במחברת בחינה ־ רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא על העמוד הראשון.**
- **במידה ואתם עונים על דפים שייתכן שיתלשו ־ רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא על כל דף תשובות.**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה ורבע.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- מבנה הבחינה:

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

Q1	
Q2	
Q3	
total	

בהצלחה!

1. [33 נק'] נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\-2&0&4\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times 3}$$

הוכיחו כי A ניתנת לשילוש ומצאו P הפיכה כך ש $P^{-1}AP$ משולשית.

פתרון: נמצא ע"ע

$$p_A(\lambda)=\left|\begin{pmatrix}\lambda&0&-2\\0&\lambda-2&0\\2&0&\lambda-4\end{pmatrix}\right|=(\lambda-2)\left|\begin{pmatrix}\lambda&-2\\2&\lambda-4\end{pmatrix}\right|=$$

$$=(\lambda-2)\left[\lambda(\lambda-4)+4\right]=(\lambda-2)\left[\lambda^2-4\lambda+4\right]=(\lambda-2)^3$$

ולכן יש ע"ע בודד $\lambda=1$. נמצא את המ"ע שלו

$$V_2=N\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&0&0\\2&0&-2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}s\\t\\s\end{pmatrix}\,:\,s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא v כך שמטריצה

$$P=\begin{pmatrix}1&0&|\\0&1&v\\1&0&|\end{pmatrix}$$

הפיכה. למשל

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

(היא הפיכה כי הדט' שלה = 1). כעת, בגלל ש $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ו"ע של 1 נקבל ש

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&*\\0&1&*\\0&0&1\end{pmatrix}=U$$

משולשית. (למעוניינים בחישוב מצא, מתקבל ש $U=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$).

2. [11 נק' לסעיף] הוכיחו/הפריכו:

(א) תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אזי מתקיים כי: אם 0 ע"ע שלה אז היא לא לכסינה.
פתרון: הפרכה. למשל מטריצה האפס לכסינה ויש לה ע"ע יחיד שהוא 0.

(ב) תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אזי מתקיים כי: אם $3v$ ו"ע אז גם v ו"ע (עבור $v\in\mathbb{F}^n$).
פתרון: הוכחה. אם $3v$ ו"ע אזי קיים λ כך ש $A(3v)=\lambda(3v)$. כיוון ש $3\neq 0$ (אחרת $3v=0$ והוא אינו ו"ע) נוכל להכפיל ב 3^{-1} ולקבל כי $Av=\lambda v$ ולכן v ו"ע (כי הוא שונה מאפס כי $v=0$ ואז $3v=0$ סתירה לכך שהוא ו"ע).

(ג) עבור $A\in\mathbb{R}^{100}$ מתקיים כי אם $m_A(x)\mid(x-2)^{50}(x-3)^{50}$ אזי $p_A(x)=(x-2)^{50}(x-3)^{50}$
פתרון: הפרכה. $A=2I$ מקיימת כי $m_A(x)=(x-2)$ ו $p_A(x)=(x-2)^{100}$.

3. [10 נק' לסעיף] יהיו $m<n$ ויהיו $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{n\times m}$ שמקיימות ש AB הפיכה ולכסינה.

(א) הוכיחו כי כל ע"ע של AB הוא ע"ע של BA.
פתרון: יהא λ ע"ע של AB. כיוון ש AB הפיכה, $\lambda\neq 0$. בנוסף קיים $v\neq 0$ כך ש $ABv=\lambda v$. נכפול ב B ונקבל כי $BA(Bv)=\lambda(Bv)$.
$Bv\neq 0$ (כי אחרת $0=A0=ABv=\lambda v$ ונקבל סתירה כי $\lambda\neq 0,v\neq 0$) ולכן הוא ו"ע שמתאים ל λ עבור המטריצה BA.

(ב) הוכיחו כי עבור λ ע"ע של AB מתקיים כי $\dim V_\lambda^{AB}=\dim V_\lambda^{BA}$ (כלומר הר"ג של λ כע"ע של AB שווה לר"ג של λ כע"ע של BA).
פתרון: יהיו $v_1,\dots v_k$ בסיס ל V_λ^{AB}. מסעיף קודם $Bv_1,\dots,Bv_k\in V_\lambda^{BA}$. נראה כי הם בת"ל ואז $\dim V_\lambda^{AB}\geq\dim V_\lambda^{BA}$. אכן נניח $\sum_{i=1}^k\alpha_iBv_i=0$
אזי $B\left(\sum_{i=1}^k\alpha_iv_i\right)=0$. כיוון ש $w=\sum_{i=1}^k\alpha_iv_i\in V_\lambda^{AB}$ נקבל שאם $w\neq 0$ אזי הוא w ו"ע של AB ולכן Bw ו"ע של BAלפי סעיף קודם בסתירה לכך $Bw=0$.
לכן $w=0$ כלומר $\sum_{i=1}^k\alpha_iv_i$ ולכן $\forall i\,\alpha_i=0$ כיוון ש $\{v_i\}_{i=1}^k$ בת"ל. בצורה זהה $\dim V_\lambda^{AB}\leq\dim V_\lambda^{BA}$ (סעיף קודם קודם נכון לכל ע"ע $\lambda\neq 0$). ולכן קיים שיוויון $\dim V_\lambda^{AB}=\dim V_\lambda^{BA}$.

(ג) הוכיחו כי $\dim N(BA)=n-m$
פתרון: לפי משפט הדרגה, נוכיח באופן שקול כי $rank(BA)=m$. אכן $rank(BA)\leq rank(A)\leq m$ מצד שני, כיוון ש AB הפיכה מתקיים כי $m\geq rank(A)\geq rank(AB)=m$ ולכן $rank(A)=m$.
בנוסף, כפל במטריצה הפיכה לא משנה דרגה ולכן

$$m=rank(A)=rank(ABA)\leq rank(BA)$$

כנדרש.

(ד) הוכיחו כי BA לכסינה.
פתרון: יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ ע"ע שונים מאפס של BA אזי הם גם ע"ע של AB ומתקיים כי $\sum_{i=1}^s\mathrm{Geo}(\lambda_i)=m$ כאשר $\mathrm{Geo}(\lambda_i)$ הוא הר"ג של λ_i (בין כע"ע של AB ובין כע"ע של BA כי סעיף ב הוכיח שהם שווים).
בנוסף ע"ע $\lambda_0=0$ הוא מר"ג $n-m$ כע"ע של BA לפי סעיף קודם ולכן בסה"כ נקבל שסכום הר"ג של ע"ע של BA הוא

$$\sum_{i=0}^s\mathrm{Geo}(\lambda_i)=(n-m)+m=n$$

ולכן ל BA יש n ו"ע בת"ל שזה שקול לכך ש BA לכסינה.