הקליד וערך: דביר חדד

<u>משפטים והוכחות לבחינה:</u>

(כל ההוכחות מהחוברת שלי באינפי 1 שמבוססת על ההרצאות של פרופ' אגרנובסקי)

<u>*1* : כל סדרה עולה מונוטונית וחסומה היא מתכנסת</u>

<u>משפט</u>: תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נניח שקיימים חסמים תחתונים ועליונים, ונסמן $M = supx_n$ או $m = inf x_n$. אז: 1) אם $x_n \nearrow$ אז קיים גבול ששווה לM. 2) אם $x_n \searrow$ קיים גבול ששווה לm.

הוכחה: 1) $x_n \nearrow$. נניח שM ממשי. נקבע כי $\varepsilon > 0$. לפי התכונה 2 של sup מתקיים $\exists \bar{n} : M - \varepsilon \leq x_{\bar{n}} \leq M + \varepsilon$. ומכאן ניתן לקבל כי מתקיים $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : \ x_n \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$. לפי ההגדרה של גבול $\lim_{n\to\infty} x_n = M$. כעת נוכיח עבור $M = +\infty$.

ע"פ הגדרה $\forall E \in R \ \exists \bar{n} : x_{\bar{n}} \geq E$. מכאן שמהמקום הזה והלאה התנאי מתקיים , ונקבל $\forall E \in R \ \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : x_n \geq E$.

עבור $x_n \searrow$ ההוכחה אנלוגית. מ.ש.ל. ■

<u>*2* : תנאי קושי, הכרחי ומספיק, להתכנסות סדרה</u>

<u>משפט</u>: הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת או"א $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח שהסדרה מתכנסת לגבול ממשי מסויים. נקבע $\varepsilon > 0$. ע"פ הגדרת הגבול $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}: |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ ואז נקבל כי ע"פ אי השיוויון המשולש $|x_n - x_m| = |(x_n - l) - (x_m - l)| \leq |x_n - l| + |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. אזי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ע"פ הגדרה.

בכיוון השני $\Rightarrow$: נניח כי הסדרה היא סדרת קושי. ע"פ הגדרה $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n, m \geq \bar{n} : \ |x_n - x_m| < \varepsilon$ ע"פ הגדרת הערך מוחלט, והעברת אגפים נקבל כי $x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$. נקבע כי $n \geq \bar{n}, m = \bar{n}, n \geq N, N \geq \bar{n}$.

ואז נקבל כי $x_m - \varepsilon \leq inf\{x_n\} \leq sup\{x_n\} \leq x_m + \varepsilon$ ואז $x_m - \varepsilon \leq \underset{n\to\infty}{\underline{lim}} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq x_m + \varepsilon$ ואז נקבל כי מתקיים $0 \leq \underset{n\to\infty}{\underline{lim}} x_n - \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq 2\varepsilon$ אבל ε קטן כרצוננו, לכן בהכרח ש $\underset{n\to\infty}{\underline{lim}} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. שני הגבולות הללו ממשיים, ולפי משפט מתקיים כי $\underset{n\to\infty}{\underline{lim}} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = l = lim_{n\to\infty} x_n$. מ.ש.ל. ■

<u>*3* : מבחן קושי (מבחן השורש) להתכנסות</u>

<u>משפט</u>: נתון $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ שכל איבריו חיוביים.נסמן $\lim \sqrt[n]{a_n} = K_n = q$ אזי:

1. אם $q < 1$ אז הטור מתכנס.
2. אם $q > 1$ אז הטור מתבדר.
3. אם $q = 1$ אז אי אפשר להגיד כלום על הטור.

הוכחה:

1. נבחר $q < q' < 1$, מתקיים כי $K_n \to q$. לכן $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : \ K_n < q'$ ז"א $\sqrt[n]{a_n} < q'$, ולכן $0 \leq q' < 1$, $a_n < (q')^n$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}(q')^n$ מתכנס, וע"פ משפט *A* מתכנס. מ.ש.ל. ■ .

2. $q>1$ ז״א $\exists\bar{n}\forall n\geq\bar{n}:\ K_n>1$ וע״פ הגדרת ה$\sqrt[n]{a_n}>1$ ולכן מתקיים כי $\exists\bar{n}\forall n\geq\bar{n}:\ a_n>1$. מכאן ש$a_n\nrightarrow 0$.

ומכאן ש$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר. מ.ש.ל. ■.

4 : <u>תנאי דריכלה להתכנסות ע״פ איבר כללי, מסקנה- התכנסות ע״פ לייבניץ.</u>

<u>משפט</u> : (מבחן דיריכלה). יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$. נניח ש :

א. סכומים חלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ חסומים. ז״א ש $\exists C\geq 0\ \forall n: \left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|\leq C$

ב. $b_n\searrow 0$ (יורדת מונוטונית ושואפת לאפס).

ואז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס.

הוכחה : נוכיח בעזרת קריטריון קושי. $\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k$.

נגדיר את התמרת אבל על מנת להקל בהוכחה : $A_n:=\sum_{k=1}^{n}a_k$ ונתון כי $|A_n|\leq C$. ע״פ ההגדרה מתקיים $a_k=A_k-A_{k-1}$.

כעת נגדיר : $T_{n,p}=\sum_{k=n+1}^{n+p}(A_k-A_{k-1})b_k=\sum_{k=n+1}^{n+p}A_kb_k-\sum_{k=n+1}^{n+p}A_{k-1}b_k$, והפעם נציב *k-1=m*.

נקבל $=\sum_{k=n+1}^{n+p}A_kb_k-\sum_{m=n}^{n+p-1}A_mb_{m+1}=A_{n+p}b_{n+p}-A_nb_{n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}A_k(b_k-b_{k+1})$ וזוהי בדיוק התמרת אבל.

כעת נחזור להוכחה ונקבע $\varepsilon>0$. נקבל ע״פ אי השיוויון המשולש כי מתקיים :

$\left|T_{n,p}\right|\leq\underbrace{\left|A_{n+p}\right|\left|b_{n+p}\right|}_{\leq C\left|b_{n+p}\right|}+\underbrace{\left|A_n\right|\left|b_{n+1}\right|}_{\leq C\left|b_{n+1}\right|}+\underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left|A_k\right|\left|b_k-b_{k+1}\right|}_{\leq C\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})}$. ולכן מתקיים :

$\left|T_{n,p}\right|\leq C\left(\left|b_{n+p}\right|+\left|b_{n+1}\right|\right)+C\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})\leq 2C\left(\left|b_{n+p}\right|+\left|b_{n+1}\right|\right)$. ואז קיבלנו אחרי כל הפיתוח המפרך כי

$\left|T_{n,p}\right|\leq 2C\left(\left|b_{n+p}\right|+\left|b_{n+1}\right|\right)$. ובגלל ש$b_n\to 0$ מתקיים כי $\exists\bar{n}\ \forall n\geq\bar{n}:\ |b_n|\leq\frac{\varepsilon}{4c}$. מ.ש.ל. ■

משפט לייבניץ טוען כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nc_n$ מתכנס אם $c_n\searrow 0$, אבל $(-1)^n$ חסום ע״י 1,1- ולכן המשפט נובע ישירות ממבחן דריכלה.

5 : <u>משפט ערך הביניים של פונקציה רציפה ע״פ קושי</u>

<u>משפט</u> : $f:[a,b]\to R$ רציפה ב$[a,b]$. לכל $y\in[f(a),f(b)]$ (ב.ה.ג.כ. $f(a)<f(b)$) קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש f(c)=y.

הוכחה : נחליף $f(x)=y$ מתקיים $f(a)\leq y\leq f(b)$ ונגדיר $g(x):=f(x)-y$. מתקיים $g(a)\geq 0\ ,\ g(b)\leq 0$. צ״ל c כך ש g(c)=0. נגדיר : $\mathrm{E}:=\{x\in[a,b]:g(x)\leq 0\}$ מתקיים $a\in E$ מתקיים גם $a\in[a,b]$. נגדיר : $c:=\sup_{x\in A}g(x)$. מתקיים כי תמיד $\forall n\in N\ \exists x_n\in E:\ c-\frac{1}{n}<x_n\leq c$ ידוע f רציפה בc לכן $g(x_n)_{n\to\infty}=g(c)$ ידוע כי גם $x_n\in E:\ g(x_n)\leq 0$ ולכן מיידית מתקיים $g(c)\leq 0$ נניח $g(c)<0$. מתקיים $\lim_{x\to c}g(x)=g(c)<0$ ולכן $\exists\delta>0\ \forall x\in(c-\delta,c+\delta)$ ומכאן $g(x)<0$ גם $g\left(c+\frac{\delta}{2}\right)<0$ לכן $c+\frac{\delta}{2}$ נמצא ב*E*. וידוע כי $c+\frac{\delta}{2}>c=supE$ בסתירה. מכאן ש*g(c)=0* . מ.ש.ל. ■

6: המשפט של ווירשטראס: פונקציה רציפה בקטע סגור וחסום, חסומה ומקבלת מקסימום ומינימום.

משפט: תהי $f: [a, b] \to R$ רציפה בכל נקודה ב-[a,b]. אזי:

1. f חסומה על [a,b]
2. קיים $x_{max} \in [a, b]$ כך ש-$f(x) \underset{x \in [a,b]}{\max} = f(x) \underset{x \in [a,b]}{\sup} = f(x_{max})$ וגם קיים $x_{min} \in [a, b]$ כך שמתקיים עבורו, בהתאם, $f(x) \underset{x \in [a,b]}{\min} = f(x) \underset{x \in [a,b]}{\inf} = f(x_{min})$.

הוכחה:

1. נניח ש-f אינה חסומה אז $\forall n \in N, \exists x_n \in [a, b]: |f(x_n)| > n$. ידוע כי $a < x_n < b$ ולכן $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה. לפי הלמה של W.B קיימת תת סדרה $x_{n_k} \to x_0 \in R$ וגם $a \le x_{n_k} \le b$. עבור $k \to \infty$ מתקיים $a \le x_0 \le b$ ומכאן $x_0 \in [a, b]$, ומכאן ש-f רציפה בנקודה x_0. לכן $f_{n_k} \to_{k\to\infty} x_0$ ומכאן $f(x_{n_k}) \to_{k\to\infty} f(x_0)$. אזי $|f(x_{n_k})| \to |f(x_0)|$ ומצד שני $|f(x_0)| = +\infty \leftarrow n_k < |f(x_{n_k})|$. אזי $\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = |f(x_0)|$. סתירה, לכן בהכרח שהיא חסומה.
   מ.ש.ל. ■
2. נסמן $M := \sup f(x), x \in [a, b]$ וגם $m := \inf f(x), x \in [a, b]$. נניח בשלילה ש-$f$ לא מקבלת ערך M. בכתיב מתמטי זאת אומרת $\forall x \in [a, b]: f(x) \ne M$ אלא $\forall x \in [a, b]: f(x) \le M$ ומכאן $\forall x \in [a, b]: f(x) < M$. נגדיר: $g(x) := \frac{1}{M - f(x)}$
   ונקבל $f \in C[a, b]$ ומכאן $M - f(x) \in C[a, b]$ ולכן $M - f(x) \ne 0$ ומכאן שגם $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ גם רציפה ב-[a,b]. לפי תכונה 1 g חסומה ב-[a,b]. אזי $\forall x \in [a, b]: 0 < g(x) \le C$ ואז מתקיים $\frac{1}{M - f(x)} \le C$ ונקבל $f(x) \le M - \frac{1}{c}$ ומצאנו חסם עליון קטן יותר, בסתירה! לכן בהכרח שהחסם העליון בקטע הסגור [a,b]. מ.ש.ל. ■

7: נגזרת של פונקציית הרכבה

משפט: $f(g(x))$, ו-f דיפרנציאבילית ב-x_0, ו-g בנקודה $f(x_0)$. אזי $h = g \circ f$ דיפרנציאבילית ב-x_0. ומתקיים כי הנגזרת נתונה ע"י $h'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$.

הוכחה: f דיפרנציאבילית ב-x_0, וגם $f(x_0 + t) = f(x_0) + At + o(t), t \to 0$, g דיפרנציאבילית ב-$y_0 = f(x_0)$. וגם כן מתקיים, בדומה ל-f, ש-$g(y_0 + s) = g(y_0) + Bs + o(s), s \to 0$. ומתקיים $B = g'(y_0)$.

גם כן מתקיים $h(x_0 + t) = g(f(x_0 + t)) = g(f(x_0) + At + o(t))$, ונגדיר $\varepsilon(t) = \frac{o(t)}{t} \to_{t\to 0} 0$ ולכן $\varepsilon(t)\, t = o(t)$,
ובאופן דומה $\mu(s) \to_{s\to 0} 0$, $o(s) = \mu(s)s$. אפשר להציב כדי לקבל $h(x_0 + t) = g\left(f(x_0) + \underbrace{At + \varepsilon(t)t}_{s}\right)$, ואם נבודד נקבל שמתקיים $h(x_0 + t) = g(y_0 + s)$. מתקיים $h(x_0 + t) = g(y_0) + Bs + \mu(s)s = g(f(x_0)) + B(At + \varepsilon(t)t) + \mu(At + \varepsilon(t)t)(At + \varepsilon(t)t)$. ולכן $g(f(x_0)) + BAt + \underbrace{B\varepsilon(t)t + \mu(At + \varepsilon(t)t)(A + \varepsilon(t))t}_{o(\varepsilon), \varepsilon\to 0}$. ומכאן שמתקיים:

$h(x_0 + t) = g(f(x_0)) + BAt + o(t), t \to 0$ ומכאן ש-h דיפרנציאבילית בנקודה x_0 ומתקיים $h'(x_0) = BA$ וגם $h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$. מ.ש.ל. ■

<u>8: משפט לגרנג׳ שהוא משפט ערך הממוצע</u>

<u>משפט</u>: תהי $f\in D(a,b)\cap C[a,b]$ אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש$f'(b)-f'(a)=f'(c)(b-a)$, ז״א $f'(c)=\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$.

הוכחה: נגדיר $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. מתקיים $F(a)=f(a)$, $F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a)$. לכן לפי הלמה של רול קיימת $c\in(a,b)$ כך ש$F'(c)=0$, ז״א $F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ ולכן $f'(c)=\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$. מ.ש.ל. ■

<u>9: כלל לופיטל עם הוכחה למקרה של 0/0</u>

<u>משפט</u>: $p\in\bar{R}$. f,g שני פונקציות המוגדרות בסביבת $U_{\delta_0}(p)\setminus\{p\}$ כאשר $U_{\delta_0}(p)=\begin{cases}(p-\delta_0,p+\delta_0), p\in R\\ \left(\frac{1}{\delta_0},+\infty\right), p=+\infty\\ \left(-\infty,-\frac{1}{\delta_0}\right), p=-\infty\end{cases}$.

נניח ש:

1. f,g גזירות ב$U_{\delta_0}(p)\setminus\{p\}$
2. $\forall x\in U_{\delta_0}(p)\setminus\{p\} : g'(x)\neq 0$
3. $\exists \lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\bar{R}$.

ושמתקיים:

א) $\lim_{x\to p}f(x)=\lim_{x\to p}g(x)=0$

ב) $\lim_{x\to p}g(x)=\pm\infty$

אזי קיים $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=L$. בכל אחד מהמקרים א׳ וב׳.

הוכחה: סביבה של L, (α,β). מתקיים $(\alpha,\beta)=(L-\varepsilon,L+\varepsilon); L\in R$ או $(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{\varepsilon},+\infty\right); L\in R$ או באופן דומה $L=-\infty; (\alpha,\beta)=\left(-\infty,-\frac{1}{\varepsilon}\right)$. גם מתקיים $\lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, לכן קיים $0<\delta<\delta_0$ כך שלכל $x\in U_{\delta_0}(p)\setminus\{p\}$ מתקיים $\alpha'<\frac{f'(x)}{g'(x)}<\beta'$. מתקיים גם כן $(\alpha',\beta')\subset(\alpha,\beta)$. לכן $\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$. מכאן שאם ניקח $x_1,x\in U_\delta(p)\setminus\{p\}$ לכן קיים $\exists c\in(x,x_1)\vee(x_1,x): \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$. ומאחר ומתקיים $c\in U_\delta(p)\setminus\{p\}$, וגם ידוע $\alpha'<\frac{f'(x)}{g'(x)}<\beta'$, לכן $\alpha'<\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}<\beta'$. מכאן שg לא מתאפסת בסביבת p.

א) $\lim_{x\to p}f(x)=\lim_{x\to p}g(x)$ ידוע. מכאן $\alpha<\alpha'<\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}<\beta'<\beta$. מתקיימת סביבה $U_\delta(p)\setminus\{p\}$ כך שלכל x ששייך לסביבה מקיים $\frac{f(x)}{g(x)}\in(\alpha,\beta)$. לכן קיים $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

ב) כאן מתקיים $\lim_{x\to p}g(x)=\pm\infty$. לכן $\alpha'\left(g(x)-g(x_1)\right)<f(x)-f(x_1)<\beta'\left(g(x)-g(x_1)\right)$. לכן אפשר להעביר אגפים ולקבל $\underbrace{\alpha'\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}}_{A}<\frac{f(x)}{g(x)}<\underbrace{\beta'\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}}_{B}$. כמובן כל זה כאשר $x\to p$. וגם ידוע לנו ממקודם שמתקיים $\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$. מכאן $\exists 0<\delta<\delta_0 : \alpha<A \wedge B<\beta$. אם $x\in U_\delta(p)\setminus\{p\}$ אז $\frac{f(x)}{g(x)}\in(\alpha,\beta)$ ואז באופן דומה לסעיף קודם $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

מ.ש.ל. ■

<u>*10* : נוסחת טיילור ע״פ שארית בצורה Peano.</u>

<u>משפט</u> : נניח $f \in D^n(a,b)$ כאשר $x_0 \in (a,b)$. אזי $f(x) = P_n(x,x_0) + o((x-x_0)^n), x \to x_0$. (צורת *Peano*)

הוכחה : באינדוקציה. עבור *n=1* זה כמעט ברור, כי $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), x \to x_0$. כעת נניח את הנחת האינדוקציה, ז״א נניח את נכונות הטענה עבור *n-1*. ז״א ש$f' \in D^{n-1}(a,b)$ ולפי ההנחה מתקיים סביב x_0 התנאי הבא, הלא הוא נתון על ידי $f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}}{k!}(x_0)(x-x_0)^k + o(x-x_0)^{n-1}$. נבדוק $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} =$ (כלל לופיטל) $= \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}} = \{k-1=s\} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f^{(s+1)}(x_0)}{s!}(x-x_0)^s}{n(x-x_0)^{n-1}} \underbrace{=}_{\text{לפי הנחה}} 0$. מ.ש.ל. ■

בהצלחה במבחן !!!