הקליד וערך: דביר חדד

משפטים והוכחות לבחינה:

(כל ההוכחות מהחוברת שלי באינפי 1 שמבוססת על ההרצאות של פרופ' אגרנובסקי)

עדכון, תאריך העלאה: 21.1.2013

1 : כל סדרה עולה מונוטונית וחסומה היא מתכנסת

משפט : תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נניח שקיימים חסמים תחתונים ועליונים, ונסמן $M = sup x_n$ או $m = inf x_n$. אז : 1) אם $x_n \nearrow$ אז קיים גבול ששווה לM. 2) אם $x_n \searrow$ קיים גבול ששווה לm.

הוכחה : 1) $x_n \nearrow$. נניח שM ממשי. נקבע כי $\varepsilon > 0$. לפי התכונה 2 של sup מתקיים $\exists \bar{n} : M - \varepsilon \leq x_{\bar{n}} \leq M + \varepsilon$. ומאחר והיא מונוטונית ניתן לקבל כי מתקיים $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : \; x_n \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$. לפי ההגדרה של גבול $\lim_{n\to\infty} x_n = M$.

כעת נוכיח עבור $M = +\infty$. ע"פ הגדרה $\forall E \in R \; \exists \bar{n} : x_{\bar{n}} \geq E$. מכאן שמהמקום הזה והלאה התנאי מתקיים , ונקבל $\forall E \in R \; \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : x_n \geq E$.

עבור $x_n \searrow$ ההוכחה אנלוגית. מ.ש.ל. ■

- יש הטוענים שאין צורך להוכיח גם עבור $M = +\infty$ כי אומרים שהסדרה חסומה. בכיתה הוכחנו עבור שני המקרים, כי באומרנו חסומה ניתן להבין שהיא חסומה ע"י $+\infty$.

2 : תנאי קושי, הכרחי ומספיק, להתכנסות סדרה

משפט : הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת או"א $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.

הוכחה : $\Leftarrow$: נניח שהסדרה מתכנסת לגבול ממשי מסויים. נקבע $\varepsilon > 0$. ע"פ הגדרת הגבול $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ ואז נקבל כי ע"פ אי השיוויון המשולש $|x_n - x_m| = |(x_n - l) - (x_m - l)| \leq |x_n - l| + |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. אזי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ע"פ הגדרה.

בכיוון השני $\Rightarrow$: נניח כי הסדרה היא סדרת קושי. ע"פ הגדרה $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n, m \geq \bar{n} : \;\; |x_n - x_m| < \varepsilon$ ע"פ הגדרת הערך מוחלט, והעברת אגפים נקבל כי $x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$. נקבע כי $n \geq \bar{n}, m = \bar{n}, n \geq N, N \geq \bar{n}$.

ואז נקבל כי $x_m - \varepsilon \leq inf\{x_n\} \leq sup\{x_n\} \leq x_m + \varepsilon$ ואז $x_m - \varepsilon \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq x_m + \varepsilon$ ואז נקבל כי מתקיים $0 \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n - \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq 2\varepsilon$ אבל ε קטן כרצוננו, לכן בהכרח ש $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. שני הגבולות הללו ממשיים, ולפי משפט מתקיים כי $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = l = lim_{n\to\infty} x_n$. מ.ש.ל. ■

3 : מבחן קושי (מבחן השורש) להתכנסות

משפט : נתון $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ שכל איבריו חיוביים.נסמן $\lim \sqrt[n]{a_n} = K_n = q$ אזי :

1. אם $q < 1$ אז הטור מתכנס.
2. אם $q > 1$ אז הטור מתבדר.
3. אם $q = 1$ אז אי אפשר להגיד כלום על הטור.

הוכחה:

1. נבחר $q < q' < 1$, מתקיים כי $K_n \to q$. לכן $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}: K_n < q'$ ז"א $\sqrt[n]{a_n} < q'$, ולכן $a_n < (q')^n$, $0 \leq q' < 1$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}(q')^n$ מתכנס, וע"פ משפט A מתכנס. מ.ש.ל. ■.
2. $q > 1$ ז"א $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}: K_n > 1$ וע"פ הגדרת ה$\sqrt[n]{a_n} > 1$ ולכן מתקיים כי $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}: a_n > 1$. מכאן ש$a_n \nrightarrow 0$. ומכאן ש$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר. מ.ש.ל. ■.

- אגרנובסקי ביקש שנדע גם את ההוכחה השניה, של ההכללה. לכאורה, מספיק ללמוד את השניה ולא את הראשונה, אבל בכל זאת מומלץ ללמוד את שניהן.

<u>משפט</u>: אם יש לנו טור חיובי, $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, נסמן $\limsup \sqrt[n]{a_n} = K_n = q$. אזי:

1. $q<1$ אזי הטור מתכנס
2. $q>1$ אזי הטור מתבדר

הוכחה: נתחיל מ2. נבחר $1 < q' < q$. נגדיר $L_n = sup\{K_n, K_{n+1}, \dots\}$ וסדרה זו שואפת לq. מתקיים $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}: 1 < q' < L_n$ ולכן $\exists K_{m_n}: 1 < K_{m_n}$ ואז ע"פ הגדרת המבחן (או סדרה) מתקבל $a_{m_n} > 1$. לכן האיבר הכללי אינו שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר. מ.ש.ל. ■

נעבור ל1. נבחר $q < q' < 1$. בדרך דומה נקבל כי מתקיים $a_n < (q')^n$, הצד הימני מתכנס, ולכן גם הטור. מ.ש.ל. ■

<u>4: תנאי דריכלה להתכנסות ע"פ איבר כללי, מסקנה- התכנסות ע"פ לייבניץ.</u>

<u>משפט</u>: (מבחן דיריכלה). יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. נניח ש:

א. סכומים חלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסומים. ז"א ש$\exists C \geq 0 \; \forall n: \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq C$
ב. $b_n \searrow 0$ (יורדת מונוטונית ושואפת לאפס).
ואז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה: נוכיח בעזרת קריטריון קושי. $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$.

נגדיר את התמרת אבל על מנת להקל בהוכחה: $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ ונתון כי $|A_n| \leq C$. ע"פ ההגדרה מתקיים $a_k = A_k - A_{k-1}$.

כעת נגדיר: $T_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p}(A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} b_k$, והפעם נציב $k-1=m$.

נקבל $\sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{m=n}^{n+p-1} A_m b_{m+1} = A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ וזוהי בדיוק התמרת אבל.

כעת נחזור להוכחה ונקבע $\varepsilon > 0$. נקבל ע"פ אי השיוויון המשולש כי מתקיים:

$\left|T_{n,p}\right| \leq \underbrace{\left|A_{n+p}\right|\left|b_{n+p}\right|}_{\leq C|b_{n+p}|} + \underbrace{|A_n||b_{n+1}|}_{\leq C|b_{n+1}|} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|A_k||b_k - b_{k+1}|}_{\leq C\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k - b_{k+1})}$. ולכן מתקיים:

$|T_{n,p}| \le C(|b_{n+p}| + |b_{n+1}|) + C\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k - b_{k+1}) \le 2C(|b_{n+p}| + |b_{n+1}|)$. ואז קיבלנו אחרי כל הפיתוח המפרך כי $|T_{n,p}| \le 2C(|b_{n+p}| + |b_{n+1}|)$. ובגלל ש$b_n \to 0$ מתקיים כי $\exists \bar{n}\ \forall n \ge \bar{n}:\ |b_n| \le \frac{\varepsilon}{4c}$. ולכן הטור מתכנס ע"פ תנאי קושי להתכנסות טורים. מ.ש.ל. ■

משפט לייבניץ טוען כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$ מתכנס אם $c_n \searrow 0$, אבל $(-1)^n$ חסום ע"י 1,1- ולכן המשפט נובע ישירות ממבחן דריכלה.

<u>5 : משפט ערך הביניים של פונקציה רציפה ע"פ קושי</u>

<u>משפט</u> : $f:[a,b] \to R$ רציפה ב$[a,b]$. לכל $y \in [f(a), f(b)]$ (ב.ה.ג.כ. $f(a) < f(b)$) קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך שf(c)=y.

הוכחה : נחליף $f(x) = y$ מתקיים $f(a) \le y \le f(b)$ ונגדיר $g(x) := f(x) - y$. מתקיים $g(a) \ge 0$, $g(b) \le 0$. צ"ל c כך שg(c)=0. נגדיר : $\mathrm{E} := \{x \in [a,b]: g(x) \le 0\}$ מתקיים $a \in E$ מתקיים גם $a \in [a,b]$. נגדיר : $c := \sup_{x \in E} g(x)$. מתקיים כי תמיד $\forall n \in N\ \exists x_n \in E : c - \frac{1}{n} < x_n \le c$ ידוע f רציפה בc לכן $g(x_n)_{n\to\infty} = g(c)$ ידוע כי גם $x_n \in E : g(x_n) \le 0$ ולכן מיידית מתקיים $g(c) \le 0$ נניח $g(c) < 0$. מתקיים $\lim_{x\to c} g(x) = g(c) < 0$ ולכן $\exists \delta > 0\ \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$ ומכאן $g(x) < 0$ גם $g\left(c + \frac{\delta}{2}\right) < 0$ לכן $c + \frac{\delta}{2}$ נמצא בE. וידוע כי $c + \frac{\delta}{2} > c = supE$ בסתירה. מכאן ש*g(c)=0* . מ.ש.ל. ■

<u>6 : המשפט של ווירשטראס : פונקציה רציפה בקטע סגור וחסום, חסומה ומקבלת מקסימום ומינימום.</u>

<u>משפט</u> : תהי $f:[a,b] \to R$ רציפה בכל נקודה ב*[a,b]*. אזי :

1. *f* חסומה על *[a,b]*
2. קיים $x_{max} \in [a,b]$ כך ש$\max_{x \in [a,b]} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_{max})$ וגם קיים $x_{min} \in [a,b]$ כך שמתקיים עבורו, בהתאם, $\min_{x \in [a,b]} f(x) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_{min})$.

הוכחה :

1. נניח ש*f* אינה חסומה אז $\forall n \in N, \exists x_n \in [a,b]: |f(x_n)| > n$. ידוע כי $a < x_n < b$ ולכן $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה. לפי הלמה של *W.B* קיימת תת סדרה $x_{n_k} \to x_0 \in R$ וגם $a \le x_{n_k} \le b$. עבור $k \to \infty$ מתקיים $a \le x_0 \le b$ ומכאן $x_0 \in [a,b]$, ומכאן ש*f* רציפה בנקודה x_0. לכן $x_{n_k} \to_{k\to\infty} x_0$ ומכאן $f(x_{n_k}) \to_{k\to\infty} f(x_0)$. אזי $|f(x_{n_k})| \to |f(x_0)|$ ומצד שני $|f(x_{n_k})| > n_k \to +\infty = |f(x_0)|$. אזי $\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = |f(x_0)|$. סתירה, לכן בהכרח שהיא חסומה. מ.ש.ל. ■
2. נסמן $M := \sup f(x), x \in [a,b]$ וגם $m := \inf f(x), x \in [a,b]$. נניח בשלילה ש*f* לא מקבלת ערך *M*. בכתיב מתמטי זאת אומרת $\forall \mathrm{x} \in [\mathrm{a,b}]: f(x) \ne M$ אלא $\forall \mathrm{x} \in [\mathrm{a,b}]: f(x) \le M$ ומכאן $\forall \mathrm{x} \in [\mathrm{a,b}]: f(x) < M$. נגדיר : $g(x) := \frac{1}{M - f(x)}$ ונקבל $f \in C[a,b]$ ומכאן $\mathrm{M} - f(x) \in C[a,b]$ ולכן $\mathrm{M} - f(x) \ne 0$ ומכאן שגם $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ גם רציפה ב*[a,b]*. לפי

תכונה 1 g חסומה ב-$[a,b]$. אזי $\forall x\in[a,b]: 0<g(x)\le C$ ואז מתקיים $\frac{1}{M-f(x)}\le C$ ונקבל $f(x)\le M-\frac{1}{c}$ ומצאנו חסם עליון קטן יותר, בסתירה ! לכן בהכרח שהחסם העליון בקטע הסגור $[a,b]$. מ.ש.ל. ■

7 : נגזרת של פונקציית הרכבה

משפט : $f(g(x))$, f ו-g דיפרנציאבילית ב-x_0, ו-g בנקודה $f(x_0)$. אזי $h=g\circ f$ דיפרנציאבילית ב-x_0 . ומתקיים כי הנגזרת נתונה ע"י $h'(x_0)=f'(x_0)g'(f(x_0))$.

הוכחה : f דיפרנציאבילית ב-x_0, וגם $f(x_0+t)=f(x_0)+At+o(t), t\to 0$, g דיפרנציאבילית ב-$y_0=f(x_0)$. וגם כן מתקיים , בדומה לכך, ש-$g(y_0+s)=g(y_0)+Bs+o(s), s\to 0$. ומתקיים $B=g'(y_0)$.

גם כן מתקיים $h(x_0+t)=g(f(x_0+t))=g(f(x_0)+At+o(t))$, ונגדיר $\varepsilon(t)=\frac{o(t)}{t}\to_{t\to 0} 0$ ולכן $\varepsilon(t)\,t=o(t)$,

ובאופן דומה $o(s)=\mu(s)s$, $\mu(s)\to_{s\to 0} 0$. אפשר להציב כדי לקבל $h(x_0+t)=g\left(f(x_0)+\underbrace{At+\varepsilon(t)t}_{s}\right)$,ואם נבודד נקבל שמתקיים $h(x_0+t)=g(y_0+s)$.

מתקיים $h(x_0+t)=g(y_0)+Bs+\mu(s)s=g(f(x_0))+B(At+\varepsilon(t)t)+\mu(At+\varepsilon(t)t)(At+\varepsilon(t)t)$.

ולכן $g(f(x_0))+BAt+\underbrace{B\varepsilon(t)t+\mu(At+\varepsilon(t)t)(A+\varepsilon(t))t}_{o(t),t\to 0}$. ומכאן שמתקיים :

$h(x_0+t)=g(f(x_0))+BAt+o(t), t\to 0$ ומכאן ש-h דיפרנציאבילית בנקודה x_0 ומתקיים $BA=h'(x_0)$ וגם מתקיים $h'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$. מ.ש.ל. ■

8 : משפט לגרנג' שהוא משפט ערך הממוצע

משפט :תהי $f\in D(a,b)\cap C[a,b]$ אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש-$f'(b)-f'(a)=f'(c)(b-a)$, ז"א $f'(c)=\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$.

הוכחה : נגדיר $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. מתקיים $F(a)=f(a)$, $F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a)$. לכן לפי הלמה של רול קיימת $c\in(a,b)$ כך ש-$F'(c)=0$, ז"א $F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ ולכן $f'(c)=\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}$. מ.ש.ל. ■

- *<u>הלמה של רול : (אין חובה לדעת להוכיח אותה, אבל צריך לדעת אותה על מנת להוכיח את משפט לגרנג')</u>*

  משפט : $f\in D(a,b)\cap C[a,b]$. אם $f(a)=f(b)$ אז קיימת $c\in(a,b)$, כך ש-$f'(c)=0$.

  הוכחה : אם $f'(x)=0\ : \forall x\in(a,b)\ ; f(x)=\alpha, f=constant$. נניח ש-$f$ לא קבוע.

  לפי המשפט של ווירשטראס, f מקבלת ב-$[a,b]$ מקסימום ומינימום. $\exists x_{max}\in(a,b) : f(x_{max})=\max f(x)$ כמו כן,

  בצורה דומה מאוד $\exists x_{min}\in(a,b) : f(x_{min})=\min f(x)$. אם $x_{min},x_{max}\in[a,b]$ אזי $f(x_{min})=f(x_{max})=$ $f(a)=f(b)$. אם כך מתקיים $\min f(x)=\max f(x)$, ולכן $f=const$ אזי x_{max} או x_{min} נקודה פנימית, נניח $c=$ $x_{max}\in(a,b)$ ולכן $f'(x)=0$. מ.ש.ל. ■

<u>9 : כלל לופיטל עם הוכחה למקרה של 0/0</u>

<u>משפט</u> : $p \in \bar{R}$. f,g שני פונקציות המוגדרות בסביבת $U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\}$ כאשר $U_{\delta_0}(p) = \begin{cases} (p-\delta_0, p+\delta_0), p \in R \\ \left(\frac{1}{\delta_0}, +\infty\right), p = +\infty \\ \left(-\infty, -\frac{1}{\delta_0}\right), p = -\infty \end{cases}$.

נניח ש :

1. f,g גזירות ב$U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\}$
2. $\forall x \in U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\} : g'(x) \neq 0$
3. $\exists \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \bar{R}$.

ושמתקיים :

א) $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x) = 0$

ב) $\lim_{x\to p} g(x) = \pm\infty$

אזי קיים $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. בכל אחד מהמקרים א' וב'.

הוכחה : סביבה של L, (α,β). מתקיים $L \in R$; $(\alpha,\beta) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ או $L \in R$; $(\alpha,\beta) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$ או באופן דומה $L = -\infty$; $(\alpha,\beta) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$. גם מתקיים $\lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, לכן קיים $0 < \delta < \delta_0$ כך שלכל $x \in U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\}$ מתקיים $\alpha' < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta'$. מתקיים גם כן $(\alpha',\beta') \subset (\alpha,\beta)$. לכן $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$. מכאן שאם ניקח $x_1, x \in U_\delta(p)\backslash\{p\}$ לכן קיים $\exists c \in (x,x_1) \vee (x_1,x)$: $\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. ומאחר ומתקיים $c \in U_\delta(p)\backslash\{p\}$, וגם ידוע $\alpha' < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta'$, לכן $\alpha' < \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} < \beta'$. מכאן ש$g$ לא מתאפסת בסביבת p.

א) $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x)$ ידוע. מכאן $\alpha < \alpha' < \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} < \beta' < \beta$. מתקיימת סביבה $U_\delta(p)\backslash\{p\}$ כך שלכל x ששייך לסביבה מקיים $\frac{f(x)}{g(x)} \in (\alpha,\beta)$. לכן קיים $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

ב) כאן מתקיים $\lim_{x\to p} g(x) = \pm\infty$. לכן $\alpha'(g(x)-g(x_1)) < f(x)-f(x_1) < \beta'(g(x)-g(x_1))$. לכן אפשר להעביר אגפים ולקבל $\underbrace{\alpha'\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}}_{A} < \frac{f(x)}{g(x)} < \underbrace{\beta'\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}}_{B}$. כמובן כל זה כאשר $x \to p$. וגם ידוע לנו ממקודם שמתקיים $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$. מכאן $\exists 0 < \delta < \delta_0 :\ \alpha < A \ \wedge B < \beta$. אם $x \in U_\delta(p)\backslash\{p\}$ אז $\frac{f(x)}{g(x)} \in (\alpha,\beta)$ ואז באופן דומה לסעיף קודם $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

מ.ש.ל. ■

<u>*10* : נוסחת טיילור ע״פ שארית בצורה Peano.</u>

<u>משפט</u> : נניח $f \in D^n(a,b)$ כאשר $x_0 \in (a,b)$. אזי $f(x) = P_n(x,x_0) + o((x-x_0)^n), x \to x_0$. (צורת *Peano*)

הוכחה : באינדוקציה. עבור *n=1* זה כמעט ברור, כי $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), x \to x_0$. כעת נניח את הנחת האינדוקציה, ז״א נניח את נכונות הטענה עבור *n-1*. ז״א ש$f' \in D^{n-1}(a,b)$ ולפי ההנחה מתקיים סביב x_0 התנאי הבא, הלא הוא נתון על ידי $f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(f'\right)^{(k)}}{k!}(x_0)(x-x_0)^k + o(x-x_0)^{n-1}$. נבדוק $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} =$ (כלל לופיטל) $= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k (x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}} = \{k-1=s\} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f^{(s+1)}(x_0)}{s!}(x-x_0)^s}{n(x-x_0)^{n-1}} \underbrace{=}_{\text{לפי הנחה}} 0$. מ.ש.ל. ■

בהצלחה במבחן !!!