

הקליד וערך: דביר חדד

משפטים והוכחות לבחינה:

(כל ההוכחות מהחוברת שלי באינפי 1 שמבוססת על ההרצאות של פרופ' אגרונובסקי)

1: כל סדרה עולה מונוטונית וחסומה היא מתכנסת

משפט: תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נניח שקיימים חסמים תחתונים ועליונים, ונסמן $M = \sup x_n$ או $m = \inf x_n$ (אז: 1) אם $x_n \nearrow$ אז קיים גבול שווה ל-M. (2) אם $x_n \searrow$ קיים גבול שווה ל-m.

הוכחה: (1) $x_n \nearrow$. נניח ש-M ממשי. נקבע כי $\varepsilon > 0$. לפי התכונה 2 של sup מתקיים $\exists \bar{n} : M - \varepsilon \leq x_{\bar{n}} \leq M + \varepsilon$. ומאחר והיא

מונוטונית ניתן לקבל כי מתקיים $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : x_n \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$. לפי ההגדרה של גבול $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$.

כעת נוכיח עבור $M = +\infty$. $\forall E \in \mathbb{R} \exists \bar{n} : x_{\bar{n}} \geq E$. מכאן שמהמקום הזה והלאה התנאי מתקיים, ונקבל $\forall E \in \mathbb{R} \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : x_n \geq E$.

עבור $x_n \searrow$ ההוכחה אנלוגית. מ.ש.ל. ■

• יש הטוענים שאין צורך להוכיח גם עבור $M = +\infty$ כי אומרים שהסדרה חסומה. בכיתה הוכחנו עבור שני המקרים, כי

באומרנו חסומה ניתן להבין שהיא חסומה ע"י $+\infty$.

2: תנאי קושי, הכרחי ומספיק, להתכנסות סדרה

משפט: הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת או"י"א $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.

הוכחה: \Leftarrow : נניח שהסדרה מתכנסת לגבול ממשי מסויים. נקבע $\varepsilon > 0$. ע"פ הגדרת הגבול $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ ואז נקבל כי

ע"פ אי השיוויון המשולש $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > |x_n - l| + |x_m - l| \geq |x_n - x_m| = |(x_n - l) - (x_m - l)| \leq |x_n - l| + |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. אזי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ע"פ הגדרה.

בכיוון השני \Rightarrow : נניח כי הסדרה היא סדרת קושי. ע"פ הגדרה $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n, m \geq \bar{n} : |x_n - x_m| < \varepsilon$.

והעברת אגפים נקבל כי $x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$. נבחר $n, m \geq \bar{n}$.

ע"פ הערך המוחלט $x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$. וידוע מהרצאות קודמות כי $x_m - \varepsilon \leq \inf_{n \geq \bar{n}} x_n \leq \sup_{n \geq \bar{n}} x_n \leq x_m + \varepsilon$ וע"פ הגדרה

נקבל כי $x_m - \varepsilon \leq l_{\bar{n}} \leq L_{\bar{n}} \leq x_m + \varepsilon$ וידוע כי $l_{\bar{n}}$ עולה מונוטונית, וכי $L_{\bar{n}}$ יורדת מונוטונית. לכן מתקבל $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_{\bar{n}} \leq x_m + \varepsilon$

ובאופן דומה $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq L_{\bar{n}} \leq x_m + \varepsilon$.

ואז $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 2\varepsilon$ ונבחר כי מתקיים $x_m - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq x_m + \varepsilon$

אבל ε קטן כרצוננו, לכן בהכרח $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

שני הגבולות הללו ממשיים, ולפי משפט מתקיים כי $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. מ.ש.ל. ■

משפט: נתון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) שכל איבריו חיוביים. נסמן $q = K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ אזי:

1. אם $q < 1$ אז הטור מתכנס.
2. אם $q > 1$ אז הטור מתבדר.
3. אם $q = 1$ אז אי אפשר להגיד כלום על הטור.

הוכחה:

1. נבחר $q < q' < 1$, מתקיים כי $K_n \rightarrow q$. לכן $K_n < q'$ $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : \sqrt[n]{a_n} < q'$ ולכן $a_n < (q')^n$, $0 \leq q' < 1$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} (q')^n$ מתכנס, וע"פ משפט A מתכנס. מ.ש.ל. ■
2. $q > 1$ ז"א $K_n > 1$ $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}$ וע"פ הגדרת ה- $\sqrt[n]{a_n} > 1$ ולכן מתקיים כי $a_n > 1$ $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}$. מכאן $a_n \not\rightarrow 0$ ומכאן ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר. מ.ש.ל. ■

- אגרובסקי ביקש שנדע גם את ההוכחה השניה, של ההכללה. לכאורה, מספיק ללמוד את השניה ולא את הראשונה, אבל בכל זאת מומלץ ללמוד את שניהן.

משפט: אם יש לנו טור חיובי, $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, נסמן $K_n := \sqrt[n]{a_n}$ וגם $\limsup K_n = q$. אזי:

1. $q < 1$ אזי הטור מתכנס
2. $q > 1$ אזי הטור מתבדר

הוכחה: נתחיל מ-2. נבחר $q < q' < 1$. נגדיר $L_n = \sup\{K_n, K_{n+1}, \dots\}$ וסדרה זו שואפת ל- q . מתקיים $L_n < q'$ $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}$ ובגלל שזה סופרימום, לכל n קיים m_n כך שגם $K_{m_n} < 1$ ואז ע"פ הגדרת המבחן (או סדרה) מתקבל $1 < m_n < (m_n \sqrt[n]{a_{m_n}})^{m_n}$. לכן מתקבל $a_{m_n} > 1$, זה אומר שהאיבר הכללי אינו שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר. מ.ש.ל. ■

נעבור ל-1. נבחר $q < q' < 1$. אנו יודעים כי $K_n \rightarrow q$ ולכן $L_n < q'$ $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}$: אבל ידוע ש- $L_n = \sup\{K_n, K_{n+1}, \dots\}$ ואז $L_n < q'$ מתקיים כי $K_n < q'$ $\forall n \geq \bar{n}$. הצד הימני מתכנס ע"פ סדרה הנדסית (כי $0 < q < 1$), וע"פ מבחן ההשוואה גם הטור. מ.ש.ל. ■

4 : תנאי דריכלה להתכנסות ע"פ איבר כללי, מסקנה- התכנסות ע"פ לייבניץ.

משפט: (מבחן דריכלה). יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. נניח ש:

- א. סכומים חלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסומים. ז"א ש- $|\sum_{k=1}^n a_k| \leq C \forall n \geq 0$
 - ב. $b_n \searrow 0$ (יורדת מונוטונית ושואפת לאפס).
- ואז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה: נוכיח בעזרת קריטריון קושי. $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$.

נגדיר את התמרת אבל על מנת להקל בהוכחה: $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$ ונתון כי $|A_n| \leq C$. ע"פ ההגדרה מתקיים $a_k = A_k - A_{k-1}$.

הקליד וערך: זביר חוד

כעת נגדיר: $T_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} (A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} b_k$, והפעם נציב $k-1=m$.

נקבל $\sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{m=n}^{n+p-1} A_m b_{m+1} = A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ וזוהי בדיוק התמרת אבל.

כעת נחזור להוכחה ונקבע $\varepsilon > 0$. נקבל ע"פ אי השיויון המשולש כי מתקיים:

$$|T_{n,p}| \leq \underbrace{|A_{n+p}| |b_{n+p}|}_{\leq C|b_{n+p}|} + \underbrace{|A_n| |b_{n+1}|}_{\leq C|b_{n+1}|} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |A_k| |b_k - b_{k+1}|}_{\leq C \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1})}$$

אפשר למחוק את הערך המוחלט
כי b_n יורדת

$$|T_{n,p}| \leq C(|b_{n+p}| + |b_{n+1}|) + \frac{C \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1})}{= b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+2} - b_{n+3} + \dots + b_{n+p-1} - b_{n+p}}$$

הכל מצומצם לראשון ולאחרון

אנחנו גם משתמשים ב $\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) = b_{n+1} - b_{n+p} \leq |b_{n+1}| + |b_{n+p}|$

ואז קיבלנו אחרי כל הפיתוח כי $|T_{n,p}| \leq 2C(|b_{n+p}| + |b_{n+1}|)$ ובגלל ש $b_n \rightarrow 0$ מתקיים כי $|b_n| \leq \frac{\varepsilon}{4c} \forall n \geq \bar{n}$. ולכן

הטור מתכנס ע"פ תנאי קושי להתכנסות טורים. מ.ש.ל. ■

משפט לייבניץ טוען כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ מתכנס אם $c_n \searrow 0$, אבל $(-1)^n$ חסום ע"י 1, -1, ולכן המשפט נובע ישירות ממבחן דריכלה.

5: משפט ערך הביניים של פונקציה רציפה ע"פ קושי

משפט: $f: [a, b] \rightarrow R$ רציפה ב $[a, b]$. לכל $y \in [f(a), f(b)]$ (ב.ה.ג.ב.) $f(a) < f(b)$ קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך $f(c)=y$.

הוכחה: נחליף $y = f(x)$ מתקיים $f(a) \leq y \leq f(b)$ ונגדיר $g(x) := f(x) - y$. מתקיים $g(a) \leq 0, g(b) \geq 0$. צ"ל c כך

$g(c)=0$. נגדיר: $E := \{x \in [a, b]: g(x) \leq 0\}$ מתקיים $a \in E$ מתקיים גם $a \in [a, b]$. נגדיר: $c := \sup_{x \in E} g(x)$. מתקיים כי

תמיד $x_n \in E: c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$ $\forall n \in N \exists x_n \in E$ בגלל ש רציפה ב c לכן $g(x_n) \rightarrow g(c)$ ידוע כי גם $g(x_n) \leq 0$ ולכן

מיידית מתקיים $g(c) \leq 0$ נניח $g(c) < 0$. מתקיים $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c) < 0$ ולכן $\exists \delta > 0 \forall x \in (c - \delta, c + \delta)$ ומכאן $g(x) < 0$

גם $g(c + \frac{\delta}{2}) < 0$ לכן $c + \frac{\delta}{2} \in E$. נמצא $c + \frac{\delta}{2} > c = \sup E$ וידוע כי $c + \frac{\delta}{2} > c$ בסתירה. מכאן $g(c)=0$. מ.ש.ל. ■

6: המשפט של ווירשטראס: פונקציה רציפה בקטע סגור וחסום, חסומה ומקבלת מקסימום ומינימום.

משפט: תהי $f: [a, b] \rightarrow R$ רציפה בכל נקודה ב $[a, b]$. אזי:

1. חסומה על $[a, b]$

2. קיים $x_{max} \in [a, b]$ כך ש $f(x_{max}) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ וגם קיים $x_{min} \in [a, b]$ כך שמתקיים עבורו,

בהתאם, $f(x_{min}) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$

הקליד וערך: זביר חזד

הוכחה:

1. נניח ש f אינה חסומה אז $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b]: |f(x_n)| > n$. ידוע כי $a \leq x_n \leq b$ ולכן $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה. לפי הלמה של $W.B$ קיימת תת סדרה $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in R$ וגם $a \leq x_{n_k} \leq b$ עבור $k \rightarrow \infty$ מתקיים $a \leq x_0 \leq b$ ומכאן $x_0 \in [a, b]$, ומכאן f

רציפה בנקודה x_0 . לכן $x_{n_k} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x_0$ ומכאן $f(x_{n_k}) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} f(x_0)$. אזי $|f(x_{n_k})| \rightarrow |f(x_0)|$

ומצד שני $|f(x_{n_k})| > n_k \rightarrow +\infty = |f(x_0)|$. אזי $|f(x_{n_k})| = |f(x_0)|$. סתירה, לכן בהכרח שהיא חסומה.

■ מ.ש.ל.

2. נסמן $M := \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ וגם $m := \inf_{x \in [a, b]} f(x)$. נניח בשלילה ש f לא מקבלת ערך M . זאת אומרת $\forall x \in [a, b]: f(x) \neq M$ אלא

$\forall x \in [a, b]: f(x) < M$ ומכאן $\forall x \in [a, b]: f(x) \leq M - \frac{1}{c}$ נגדיר: $g(x) := \frac{1}{M - f(x)}$. ידוע כי $f \in C[a, b]$ ומכאן שמתקיים

$M - f(x) \in C[a, b]$ וגם $M - f(x) \neq 0$. מכאן שגם $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ רציפה ב $[a, b]$.

לפי תכונה 1, g חסומה ב $[a, b]$. אזי $\exists C \geq 0 \forall x \in [a, b]: 0 < g(x) \leq C$ ואז מתקיים $\frac{1}{M - f(x)} \leq C$ ונקבל $f(x) \leq M - \frac{1}{c}$

ומצאנו חסם מלעיל שקטן מהחסם העליון (הסופרימום), בסתירה! לכן בהכרח שהחסם העליון בקטע הסגור $[a, b]$. מ.ש.ל. ■

7: נגזרת של פונקציית הרכבה

משפט: תהי $h = g \circ f$, f, h דיפרנציאביליות ב x_0 , g בנקודה $f(x_0)$. אזי h דיפרנציאבילית ב x_0 . והנגזרת היא

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

$$A = f'(x_0)$$

הוכחה: דיפרנציאביליות ב x_0 , וגם $f(x_0 + t) = f(x_0) + \tilde{A}t + o(t)$, $t \rightarrow 0$ מתקיים, בדומה ל f , ש $g(y_0 + s) = g(y_0) + Bs + o(s)$, $s \rightarrow 0$. ומתקיים $B = g'(y_0)$.

גם כן מתקיים $h(x_0 + t) = g(f(x_0 + t)) = g(f(x_0) + At + o(t))$, ונגדיר $\varepsilon(t) = \frac{o(t)}{t} \rightarrow_{t \rightarrow 0} 0$ ולכן $t = o(t)$, $\varepsilon(t)$ ובאופן דומה $0 = \mu(s)$, $\mu(s) \rightarrow_{s \rightarrow 0} 0$. אפשר להציב כדי לקבל $h(x_0 + t) = g\left(f(x_0) + \frac{At + \varepsilon(t)t}{s}\right)$, ואם נבודד נקבל שמתקיים $h(x_0 + t) = g(y_0 + s)$.

מתקיים $h(x_0 + t) = g(y_0) + Bs + \mu(s)s = g(f(x_0)) + B(At + \varepsilon(t)t) + \mu(At + \varepsilon(t)t)(At + \varepsilon(t)t)$

ולכן $h(x_0 + t) = g(f(x_0)) + BA t + \underbrace{B\varepsilon(t)t + \mu(At + \varepsilon(t)t)(A + \varepsilon(t))t}_{o(t), t \rightarrow 0}$ ומכאן שמתקיים:

$h(x_0 + t) = g(f(x_0)) + BA t + o(t)$, $t \rightarrow 0$ ומכאן ש h דיפרנציאבילית בנקודה x_0 ומתקיים $BA = h'(x_0)$ וגם מתקיים $h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$. ■ מ.ש.ל.

8: משפט לגרנג' שהוא משפט ערך הממוצע

משפט: תהי $f \in D(a, b) \cap C[a, b]$ אזי קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ז"א שמתקיים

הקליד וערך: זביר חוד

הוכחה: נגדיר $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. מתקיים $F(a) = f(a)$, $F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$. לכן
 לפי הלמה של רול קיימת $c \in (a, b)$ כך ש $F'(c) = 0$, ז"א $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ ולכן $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. מ.ש.ל. ■

• הלמה של רול: (אין חובה לדעת להוכיח אותה, אבל צריך לדעת אותה על מנת להוכיח את משפט לגרנג)

משפט: $f \in D(a, b) \cap C[a, b]$. אם $f(a) = f(b)$ אז קיימת $c \in (a, b)$ כך ש $f'(c) = 0$.
 הוכחה:

לפי המשפט של וירשטראס, f מקבלת ב $[a, b]$ מקסימום ומינימום. $\exists x_{\max} \in [a, b] : f(x_{\max}) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ כמו

כן, בצורה דומה מאוד $\exists x_{\min} \in [a, b] : f(x_{\min}) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ (במקרה ששניהם

קצוות) אזי $f(x_{\min}) = f(x_{\max}) = f(a) = f(b)$. אם כך מתקיים $\min f(x) = \max f(x)$, ולכן $f = \text{const}$ ולכן אפשר

לקחת כל נקודה שהיא בתור c . מ.ש.ל. ■

9: כלל לופיטל עם הוכחה למקרה של 0/0

משפט: $p \in \bar{R}$. שני פונקציות המוגדרות בסביבת $U_{\delta_0}(p) \setminus \{p\}$ כאשר

$$U_{\delta_0}(p) = \begin{cases} (p - \delta_0, p + \delta_0), & p \in R \\ (\frac{1}{\delta_0}, +\infty), & p = +\infty \\ (-\infty, -\frac{1}{\delta_0}), & p = -\infty \end{cases}$$

נניח ש:

1. f, g גזירות ב $U_{\delta_0}(p) \setminus \{p\}$
2. $\forall x \in U_{\delta_0}(p) \setminus \{p\} : g'(x) \neq 0$
3. $\exists \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \bar{R}$

ושמתקיים אחד מהמקרים הבאים:

א) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0$

ב) $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = \pm \infty$

אזי קיים $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. בכל אחד מהמקרים אי ובי.

הוכחה: סביבה של L , (α, β) . מתקיים $L \in R$ או $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{\epsilon}, +\infty)$; או באופן דומה

$(\alpha, \beta) = (-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$; $L = -\infty$. גם מתקיים $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, לכן קיים $0 < \delta < \delta_0$ כך שלכל $x \in U_{\delta_0}(p) \setminus \{p\}$ מתקיים

$$\alpha' < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta' \quad (\text{משתמשים ב } \delta \text{ כדי להגדיר את } \alpha', \beta')$$

עבור $(\alpha', \beta') \subset (\alpha, \beta)$ מתקיים $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$. לפי משפט קושי אם ניקח $x_1, x \in U_{\delta}(p) \setminus \{p\}$

קיים $\exists c \in (x, x_1) \vee (x_1, x) : \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ ומאחר ומתקיים $c \in U_{\delta}(p) \setminus \{p\}$, וגם ידוע $\alpha' < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta'$

לכן $\alpha' < \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} < \beta'$. מכאן ש g לא מתאפסת בסביבת p .

הקליד וערך: זביר חוד

(א) וגם $\lim_{x_1 \rightarrow p} f(x) = \lim_{x_1 \rightarrow p} g(x) = 0$ ידוע. $\alpha < \alpha' < \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} < \beta' < \beta$ נבצע מעבר גבול של $x_1 \rightarrow p$ ונגיע לכן $\frac{f(x)}{g(x)} \in (\alpha, \beta)$ מתקיימת סביבה $U_\delta(p) \setminus \{p\}$ כך שלכל x ששייך לסביבה מקיים $\alpha < \alpha' \leq \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} \leq \beta' < \beta$ קיים $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

(ב) כאן מתקיים $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = \pm\infty$ לכן $\alpha'(g(x) - g(x_1)) < f(x) - f(x_1) < \beta'(g(x) - g(x_1))$ לכן אפשר להעביר

אגפים ולקבל $\alpha' \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta' \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) + \frac{f(x_1)}{g(x)}$ כמובן כל זה כאשר $x \rightarrow p$ וגם ידוע לנו

ממקודם שמתקיים $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ מכאן $\alpha < A, B < \beta$ אם $\exists 0 < \delta < \delta_0$ אז $x \in U_\delta(p) \setminus \{p\}$ או $\frac{f(x)}{g(x)} \in (\alpha, \beta)$ ואז באופן דומה לסעיף קודם $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

■ מ.ש.ל.

10 : נוסחת טיילור ע"פ שארית בצורה Peano.

משפט: נניח $f \in D^n(a, b)$ כאשר $x_0 \in (a, b)$ אזי $f(x) = P_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$ (צורת Peano) ונגדיר כך את $P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

הוכחה: באינדוקציה. עבור $n=1$ זה כמעט ברור, כי לפי הגדרת הנגזרת $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$ כעת נניח את הנחת האינדוקציה, ז"א נניח את נכונות הטענה עבור $n-1$. ז"א ש $f' \in D^{n-1}(a, b)$ ולפי ההנחה מתקיים סביב x_0

התנאי הבא, הלא הוא נתון על ידי $f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}}{k!} (x_0)(x - x_0)^k + o(x - x_0)^{n-1}$ לפי כלל לופיטל

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k(x - x_0)^{k-1}}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

■ מ.ש.ל. $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$ ולכן $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f^{(s+1)}(x_0)}{s!} (x - x_0)^s}{n(x - x_0)^{n-1}} \stackrel{\text{לפי הנחה}}{=} 0$

בהצלחה במבחן !!!