הקליד וערך: דביר חדד

משפטים והוכחות לבחינה:

(כל ההוכחות מהחוברת שלי באינפי 1 שמבוססת על ההרצאות של פרופ' אגרנובסקי)

1 : כל סדרה עולה מונוטונית וחסומה היא מתכנסת

משפט : תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נניח שקיימים חסמים תחתונים ועליונים, ונסמן $M = sup x_n$ או $m = inf x_n$. אז : 1) אם $x_n \nearrow$ אז קיים גבול ששווה לM. 2) אם $x_n \searrow$ קיים גבול ששווה לm.

הוכחה : 1) $x_n \nearrow$. נניח שM ממשי. נקבע כי $\varepsilon > 0$. לפי התכונה 2 של sup מתקיים $\exists \bar{n} : M - \varepsilon \leq x_{\bar{n}} \leq M + \varepsilon$. ומאחר והיא מונוטונית ניתן לקבל כי מתקיים $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : \ x_n \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$. לפי ההגדרה של גבול $\lim_{n\to\infty} x_n = M$.

כעת נוכיח עבור $M = +\infty$. ע"פ הגדרה $\forall E \in R \ \exists \bar{n} : x_{\bar{n}} \geq E$. מכאן שמהמקום הזה והלאה התנאי מתקיים , ונקבל $\forall E \in R \ \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : x_n \geq E$.

עבור $x_n \searrow$ ההוכחה אנלוגית. מ.ש.ל. ■

- יש הטוענים שאין צורך להוכיח גם עבור $M = +\infty$ כי אומרים שהסדרה חסומה. בכיתה הוכחנו עבור שני המקרים, כי באומרנו חסומה ניתן להבין שהיא חסומה ע"י $+\infty$.

2 : תנאי קושי, הכרחי ומספיק, להתכנסות סדרה

משפט : הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת או"א $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.

הוכחה : $\Leftarrow$: נניח שהסדרה מתכנסת לגבול ממשי מסויים. נקבע $\varepsilon > 0$. ע"פ הגדרת הגבול $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ ואז נקבל כי ע"פ אי השיוויון המשולש $|x_n - x_m| = |(x_n - l) - (x_m - l)| \leq |x_n - l| + |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. אזי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ע"פ הגדרה.

בכיוון השני $\Rightarrow$: נניח כי הסדרה היא סדרת קושי. ע"פ הגדרה $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \forall n, m \geq \bar{n} : \ |x_n - x_m| < \varepsilon$ ע"פ הגדרת הערך מוחלט, והעברת אגפים נקבל כי $x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$. נבחר $n, m \geq \bar{n}$.

ע"פ הערך המוחלט $x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$. וידוע מהרצאות קודמות כי $x_m - \varepsilon \leq \inf_{n\geq\bar{n}} x_n \leq \sup_{n\geq\bar{n}} x_n \leq x_m + \varepsilon$ וע"פ הגדרה נקבל כיִ $x_m - \varepsilon \leq l_{\bar{n}} \leq L_{\bar{n}} \leq x_m + \varepsilon$ וידוע כי $l_{\bar{n}}$ עולה מונוטונית, וכי $L_{\bar{n}}$ יורדת מונוטונית. לכן מתקבל $x_m - \varepsilon \leq l_{\bar{n}} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ובאופן דומה $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq L_{\bar{n}} + \leq x_m + \varepsilon$.

ואז $x_m - \varepsilon \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq x_m + \varepsilon$ ואז נקבל כי מתקיים $0 \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n - \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq 2\varepsilon$

אבל ε קטן כרצוננו, לכן בהכרח ש$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

שני הגבולות הללו ממשיים, ולפי משפט מתקיים כי $lim_{n\to\infty} x_n = l = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$. מ.ש.ל. ■

3 : מבחן קושי (מבחן השורש) להתכנסות

משפט: נתון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) שכל איבריו חיוביים.נסמן $\lim \sqrt[n]{a_n} = \mathrm{K}_n = q$ אזי:

1. אם $q < 1$ אז הטור מתכנס.
2. אם $q > 1$ אז הטור מתבדר.
3. אם $q = 1$ אז אי אפשר להגיד כלום על הטור.

הוכחה:

1. נבחר $q < q' < 1$, מתקיים כי $K_n \to q$. לכן $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : \ K_n < q'$ ז״א $\sqrt[n]{a_n} < q'$, ולכן $a_n < (q')^n$, $0 \leq q' < 1$
ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} (q')^n$ מתכנס, וע״פ משפט A מתכנס. מ.ש.ל. ■.
2. $q > 1$ ז״א $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : \ K_n > 1$ וע״פ הגדרת ה$\sqrt[n]{a_n} > 1$ ולכן מתקיים כי $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : \ a_n > 1$. מכאן ש$a_n \nrightarrow 0$.
ומכאן ש$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר. מ.ש.ל. ■.

- אגרנובסקי ביקש שנדע גם את ההוכחה השניה, של ההכללה. לכאורה, מספיק ללמוד את השניה ולא את הראשונה, אבל בכל זאת מומלץ ללמוד את שניהן.

משפט: אם יש לנו טור חיובי, $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, נסמן $K_n := \sqrt[n]{a_n}$ וגם $\lim supK_n = q$. אזי:

1. *q<1* אזי הטור מתכנס
2. *q>1* אזי הטור מתבדר

הוכחה: נתחיל מ2. נבחר $1 < q' < q$. נגדיר $L_n = sup\{K_n, K_{n+1}, \dots\}$ וסדרה זו שואפת לq. מתקיים $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : q' < L_n$ ובגלל שזה סופרימום, לכל n קיים m_n כך שגם $1 < K_{m_n}$ ואז ע״פ הגדרת המבחן (או סדרה) מתקבל$\left(\sqrt[m_n]{a_{m_n}}\right)^{m_n} > 1^{m_n}$. לכן מתקבל $a_{m_n} > 1$, זה אומר שהאיבר הכללי אינו שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר. מ.ש.ל. ■

נעבור ל1. נבחר $q < q' < 1$. אנו יודעים כי $L_n \to q$ ולכן $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}: L_n < q'$ אבל ידוע ש$L_n = sup\{K_n, K_{n+1}, \dots\}$ ואז $\forall n \geq \bar{n}$ מתקיים כי $k_n < q'$. לכן $\sqrt[n]{a_n} < q'$ ואז $a_n < (q')^n$, הצד הימני מתכנס ע״פ סדרה הנדסית (כי $0 < q < 1$), וע״פ מבחן ההשוואה גם הטור. מ.ש.ל. ■

4 : תנאי דריכלה להתכנסות ע״פ איבר כללי, מסקנה- התכנסות ע״פ לייבניץ.

משפט: (מבחן דיריכלה). יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. נניח ש:

א. סכומים חלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חסומים. ז״א ש$\exists C \geq 0 \ \forall n: \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq C$
ב. $b_n \searrow 0$ (יורדת מונוטונית ושואפת לאפס).
ואז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

הוכחה: נוכיח בעזרת קריטריון קושי. $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$.

נגדיר את התמרת אבל על מנת להקל בהוכחה: $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ ונתון כי $|A_n| \leq \mathrm{C}$. ע״פ ההגדרה מתקיים $a_k = A_k - A_{k-1}$.

כעת נגדיר: $T_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p}(A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} b_k$, והפעם נציב $k-1=m$.

נקבל$= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{m=n}^{n+p-1} A_m b_{m+1} = A_{n+p}b_{n+p} - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k(b_k - b_{k+1})$ וזוהי בדיוק התמרת אבל.

כעת נחזור להוכחה ונקבע $\varepsilon > 0$. נקבל ע"פ אי השיוויון המשולש כי מתקיים:

$$\left|T_{n,p}\right| \le \underbrace{\left|A_{n+p}\right|\left|b_{n+p}\right|}_{\le C\left|b_{n+p}\right|} + \underbrace{\left|A_n\right|\left|b_{n+1}\right|}_{\le C\left|b_{n+1}\right|} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\left|A_k\right|\left|b_k - b_{k+1}\right|}_{\le C\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k - b_{k+1})}$$

אפשר למחוק את הערך המוחלט כי b_n יורדת

. ולכן מתקיים:

$$\left|T_{n,p}\right| \le C\left(\left|b_{n+p}\right| + \left|b_{n+1}\right|\right) + \underbrace{C\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k - b_{k+1})}_{=b_{n+1}-b_{n+2}+b_{n+2}-b_{n+3}+\cdots+b_{n+p-1}-b_{n+p}} \le 2C\left(\left|b_{n+p}\right| + \left|b_{n+1}\right|\right).$$

הכל מצומצם לראשון ולאחרון

אנחנו גם משתמשים ב$\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k - b_{k+1}) = b_{n+1} - b_{n+p} \le \left|b_{n+1}\right| + \left|b_{n+p}\right|$

ואז קיבלנו אחרי כל הפיתוח כי $\left|T_{n,p}\right| \le 2C\left(\left|b_{n+p}\right| + \left|b_{n+1}\right|\right)$. ובגלל ש$b_n \to 0$ מתקיים כי $\exists \bar{n}\ \forall n \ge \bar{n}:\ \left|b_n\right| \le \frac{\varepsilon}{4c}$. ולכן הטור מתכנס ע"פ תנאי קושי להתכנסות טורים. מ.ש.ל. ■

משפט לייבניץ טוען כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$ מתכנס אם $c_n \searrow 0$, אבל $(-1)^n$ חסום ע"י 1,1- ולכן המשפט נובע ישירות ממבחן דריכלה.

5: משפט ערך הביניים של פונקציה רציפה ע"פ קושי

<u>משפט</u>: $f: [a,b] \to R$ רציפה ב$[a,b]$. לכל $y \in [f(a), f(b)]$ (ב.ה.ג.כ. $f(a) < f(b)$) קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש f(c)=y.

הוכחה: נחליף $f(x) = y$ מתקיים $f(a) \le y \le f(b)$ ונגדיר $g(x) := f(x) - y$. מתקיים $g(a) \le 0\ , g(b) \ge 0$. צ"ל c כך ש g(c)=0. נגדיר: $E := \{x \in [a,b]: g(x) \le 0\}$ מתקיים $a \in E$ מתקיים גם $a \in [a,b]$. נגדיר: $c := \sup_{x \in E} g(x)$. מתקיים כי תמיד $\forall n \in N\ \exists x_n \in E:\ c - \frac{1}{n} < x_n \le c$ בגלל שf רציפה בc לכן $g(x_n)_{n\to\infty} \to g(c)$ ידוע כי גם $x_n \in E:\ g(x_n) \le 0$ ולכן מיידית מתקיים $g(c) \le 0$ נניח $g(c) < 0$. מתקיים $\lim_{x\to c} g(x) = g(c) < 0$ ולכן $\exists \delta > 0\ \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$ ומכאן $g(x) < 0$ גם $g\left(c + \frac{\delta}{2}\right) < 0$ לכן $c + \frac{\delta}{2}$ נמצא בE. וידוע כי $c + \frac{\delta}{2} > c = \sup E$ בסתירה. מכאן ש g(c)=0. מ.ש.ל. ■

6: המשפט של ווירשטראס: פונקציה רציפה בקטע סגור וחסום, חסומה ומקבלת מקסימום ומינימום.

<u>משפט</u>: תהי $f: [a,b] \to R$ רציפה בכל נקודה ב[a,b]. אזי:

1. f חסומה על [a,b]
2. קיים $x_{max} \in [a,b]$ כך ש$\max_{x \in [a,b]} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_{max})$ וגם קיים $x_{min} \in [a,b]$ כך שמתקיים עבורו, בהתאם, $\min_{x \in [a,b]} f(x) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_{min})$.

הוכחה:

1. נניח שf אינה חסומה אז $\forall n \in N, \exists x_n \in [a,b]: |f(x_n)| > n$. ידוע כי $a \le x_n \le b$ ולכן $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה. לפי הלמה של $W.B$ קיימת תת סדרה $x_{n_k} \to x_0 \in R$ וגם $a \le x_{n_k} \le b$. עבור $k \to \infty$ מתקיים $a \le x_0 \le b$ ומכאן $x_0 \in [a,b]$, ומכאן שf רציפה בנקודה x_0. לכן $x_{n_k} \to_{k\to\infty} x_0$ ומכאן $f(x_{n_k}) \to_{k\to\infty} f(x_0)$. אזי $|f(x_{n_k})| \to |f(x_0)|$ ומצד שני $|f(x_0)| = +\infty \leftarrow n_k < |f(x_{n_k})|$. אזי $\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = |f(x_0)|$. סתירה, לכן בהכרח שהיא חסומה.
מ.ש.ל. ■

2. נסמן $M \coloneqq \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. וגם $m \coloneqq \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. נניח בשלילה ש$f$ לא מקבלת ערך M. זאת אומרת $\forall x \in [a,b]: f(x) \neq M$ אלא $\forall x \in [a,b]: f(x) \le M$ ומכאן $\forall x \in [a,b]: f(x) < M$. נגדיר: $g(x) \coloneqq \frac{1}{M-f(x)}$ ידוע כי $f \in C[a,b]$ ומכאן שמתקיים $M - f(x) \in C[a,b]$ וגם $M - f(x) \neq 0$. מכאן שגם $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ רציפה ב*[a,b]*.
לפי תכונה 1, *g* חסומה ב*[a,b]*. אזי $\exists C \ge 0 \forall x \in [a,b]: 0 < g(x) \le C$ ואז מתקיים $\frac{1}{M-f(x)} \le C$ ונקבל $f(x) \le M - \frac{1}{c}$
ומצאנו חסם מלעיל שקטן מהחסם העליון (הסופרימום), בסתירה ! לכן בהכרח שהחסם העליון בקטע הסגור *[a,b]*. מ.ש.ל. ■

7: נגזרת של פונקציית הרכבה

<u>משפט</u>: תהי $h = g \circ f$, f דיפרנציאבילית בx_0, וg בנקודה $f(x_0)$. אזי h דיפרנציאבילית בx_0 . והנגזרת היא $h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

הוכחה: f דיפרנציאבילית בx_0, וגם $f(x_0 + t) = f(x_0) + \overbrace{A}^{A=f'(x_0)} t + o(t), t \to 0$, g דיפרנציאבילית ב$y_0 = f(x_0)$. וגם כן מתקיים , בדומה לf, ש$g(y_0 + s) = g(y_0) + Bs + o(s), s \to 0$. ומתקיים $B = g'(y_0)$.

גם כן מתקיים $h(x_0 + t) = g(f(x_0 + t)) = g(f(x_0) + At + o(t))$, ונגדיר $\varepsilon(t) = \frac{o(t)}{t} \to_{t\to 0} 0$ ולכן $\varepsilon(t)\, t = o(t)$,
ובאופן דומה $\mu(s) \to_{s\to 0} 0$, $o(s) = \mu(s)s$. אפשר להציב כדי לקבל $h(x_0 + t) = g\left(f(x_0) + \underbrace{At + \varepsilon(t)t}_{s}\right)$,ואם נבודד נקבל שמתקיים $h(x_0 + t) = g(y_0 + s)$.

מתקיים $h(x_0 + t) = g(y_0) + Bs + \mu(s)s = g(f(x_0)) + B(At + \varepsilon(t)t) + \mu(At + \varepsilon(t)t)(At + \varepsilon(t)t)$.

ולכן $h(x_0 + t) = g(f(x_0)) + BAt + \underbrace{B\varepsilon(t)t + \mu(At + \varepsilon(t)t)(A + \varepsilon(t))t}_{o(t), t\to 0}$. ומכאן שמתקיים:

$h(x_0 + t) = g(f(x_0)) + BAt + o(t), t \to 0$ ומכאן שh דיפרנציאבילית בנקודה x_0 ומתקיים $BA = h'(x_0)$ וגם מתקיים $h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$. מ.ש.ל. ■

8: משפט לגרנגי שהוא משפט ערך הממוצע

<u>משפט</u>: תהי $f \in D(a,b) \cap C[a,b]$ אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$,

ז"א שמתקיים $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הוכחה: נגדיר $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. מתקיים $F(a) = f(a)$, $F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$. לכן לפי הלמה של רול קיימת $c \in (a,b)$ כך ש$F'(c) = 0$, ז"א $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ ולכן $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. מ.ש.ל. ■

- <u>*הלמה של רול: (אין חובה לדעת להוכיח אותה, אבל צריך לדעת אותה על מנת להוכיח את משפט לגרנג')*</u>

<u>משפט</u>: $f \in D(a,b) \cap C[a,b]$. אם $f(a) = f(b)$ אז קיימת $c \in (a,b)$, כך ש$f'(c) = 0$.

הוכחה:

לפי המשפט של ווירשטראס, f מקבלת ב*[a,b]* מקסימום ומינימום. $\exists x_{\max} \in [a,b] : f(x_{max}) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ כמו כן, בצורה דומה מאוד $\exists x_{\min} \in [a,b] : f(x_{min}) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$. אם $x_{\min}, x_{\max} \in \{a,b\}$ (במקרה ששניהם קצוות) אזי $f(x_{\min}) = f(x_{\max}) = f(a) = f(b)$. אם כך מתקיים $\min f(x) = \max f(x)$, ולכן *f=const* ולכן אפשר לקחת כל נקודה שהיא בתור *c*. מ.ש.ל. ■

<u>9: כלל לופיטל עם הוכחה למקרה של 0/0</u>

<u>משפט</u>: $p \in \bar{R}$. *f,g* שני פונקציות המוגדרות בסביבת $U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\}$ כאשר $U_{\delta_0}(p) = \begin{cases} (p-\delta_0, p+\delta_0), p \in R \\ \left(\frac{1}{\delta_0}, +\infty\right), p = +\infty \\ \left(-\infty, -\frac{1}{\delta_0}\right), p = -\infty \end{cases}$.

נניח ש:

1. *f,g* גזירות ב$U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\}$
2. $\forall x \in U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\} : g'(x) \neq 0$
3. $\exists \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \bar{R}$.

ושמתקיים אחד מהמקרים הבאים:

א) $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x) = 0$

ב) $\lim_{x\to p} g(x) = \pm\infty$

אזי קיים $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. בכל אחד מהמקרים א' וב'.

הוכחה: סביבה של L, (α,β). מתקיים $L \in R; (\alpha,\beta) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ או $L \in R; (\alpha,\beta) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$ או באופן דומה $L = -\infty; (\alpha,\beta) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$. גם מתקיים $\lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, לכן קיים $0 < \delta < \delta_0$ כך שלכל $x \in U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\}$ מתקיים $\alpha' < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta'$. (משתמשים ב$\delta$ כדי להגדיר את α', β')

עבור $(\alpha',\beta') \subset (\alpha,\beta)$ מתקיים $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$. לפי משפט קושי אם ניקח $x_1, x \in U_\delta(p)\backslash\{p\}$ קיים $\exists c \in (x,x_1) \vee (x_1,x): \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. ומאחר ומתקיים $c \in U_\delta(p)\backslash\{p\}$, וגם ידוע $\alpha' < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \beta'$, לכן $\alpha' < \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} < \beta'$. מכאן ש*g* לא מתאפסת בסביבת *p*.

א) $\lim_{x_1\to p} f(x) = \lim_{x_1\to p} g(x) = 0$ ידוע. וגם $\alpha < \alpha' < \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} < \beta' < \beta$. נבצע מעבר גבול של $x_1 \to p$ ונגיע ל$\alpha < \alpha' \le \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} \le \beta' < \beta$ מתקיימת סביבה $U_\delta(p)\setminus\{p\}$ כך שלכל x ששייך לסביבה מקיים $\frac{f(x)}{g(x)} \in (\alpha,\beta)$. לכן קיים $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

ב) כאן מתקיים $\lim_{x\to p} g(x) = \pm\infty$. לכן $\alpha'\left(g(x)-g(x_1)\right) < f(x)-f(x_1) < \beta'\left(g(x)-g(x_1)\right)$. לכן אפשר להעביר אגפים ולקבל $\underbrace{\alpha'\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}}_{A} < \frac{f(x)}{g(x)} < \underbrace{\beta'\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}}_{B}$. כמובן כל זה כאשר $x\to p$. וגם ידוע לנו ממקודם שמתקיים $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$. מכאן $\exists 0<\delta<\delta_0 :\ \alpha < A,\ B < \beta$. אם $x \in U_\delta(p)\setminus\{p\}$ אז $\frac{f(x)}{g(x)} \in (\alpha,\beta)$ ואז באופן דומה לסעיף קודם $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

מ.ש.ל. ■

<u>*10* : נוסחת טיילור ע"פ שארית בצורה Peano.</u>

<u>משפט</u> : נניח $f \in D^n(a,b)$ כאשר $x_0 \in (a,b)$. אזי $f(x) = P_n(x,x_0) + o((x-x_0)^n), x\to x_0$. (צורת *Peano*) ונגדיר כך את $P_n(x,x_0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

הוכחה : באינדוקציה. עבור *n=1* זה כמעט ברור, כי לפי הגדרת הנגזרת $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), x\to x_0$.
כעת נניח את הנחת האינדוקציה, ז"א נניח את נכונות הטענה עבור *n-1*. ז"א ש$f' \in D^{n-1}(a,b)$ ולפי ההנחה מתקיים סביב x_0 התנאי הבא, הלא הוא נתון על ידי $f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(f')^{(k)}}{k!}(x_0)(x-x_0)^k + o(x-x_0)^{n-1}$. לפי כלל לופיטל

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}$$ ועל"פ החלפת אינדקס $\{k-1=s\}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{f^{(s+1)}(x_0)}{s!}(x-x_0)^s}{n(x-x_0)^{n-1}} \underbrace{=}_{\text{לפי הנחה}} 0$$ ולכן $f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = o((x-x_0)^n), x\to x_0$ מ.ש.ל. ■

בהצלחה במבחן !!!