תרגיל בית 5

1. תנו דוגמא לסדרה של פונקציות אי- שליליות f_n השואפות לאפס נקודתית כך ש $\lim_{n\to\infty}\int f_n = 0$

אבל לא קיימת פונקציה אינטגרבילית g $f_n < g$ לכל n .

פתרון: ניקח את סדרת הפונקציות הבאות:

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n-1 \le x \le n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

קל לראות כי $f_n \to 0$ וגם כי $\int f_n = \frac{1}{n} \to 0$. אם $f_n < g$, אזי בהכרח $\int f_n < \int g$ לכל n .

מכאן ש $\int_{\mathbb{R}} gdm = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} g1_{\{n-1\le x\le n\}}dm \ge \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}dm = \infty$.

2. הפעילו את למת פאטו עבור מידת לבג על הממשיים על הסדרות הבאות:

i. $1_{(n,n+1)}(x)$

ii. $1_{(n,\infty)}(x)$

$n1_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(x)$

iii. $1+\operatorname{sgn}\left(\sin\left(2^n(2\pi x)\right)\right)$

פתרון:

i. $\underline{\lim}\int 1_{(n,n+1)}(x) = m\left((\mathrm{n},\mathrm{n}+1)\right) = 1 \ge \int \underline{\lim} 1_{(n,n+1)}(x) = \int 0 = 0$

ii. $\underline{\lim}\int 1_{(n,\infty)}(x) = m\left((\mathrm{n},\infty)\right) = \infty \ge \int \underline{\lim} 1_{(n,\infty)}(x) = \int 0 = 0$

iii. $\underline{\lim}\int n1_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(x) = nm\left(\left(0,\frac{1}{n}\right)\right) = 1 \ge \int \underline{\lim} n1_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(x) = \int 0 = 0$

iv.

$$\int 1+\operatorname{sgn}\left(\sin\left(2^n(2\pi x)\right)\right) = \int 0\cdot 1_{\{x:\sin\left(2^n(2\pi x)\right)<0\}} + 2\cdot 1_{\{x:\sin\left(2^n(2\pi x)\right)>0\}}$$

$$= \int 2\cdot 1_{\{x:\sin\left(2^n(2\pi x)\right)>0\}} = 2m\left(\{x:\sin\left(2^n(2\pi x)\right)>0\}\right) = 2\cdot\infty = \infty$$

מצד שני,

מכיוון שלכל x יהיה $\sin\left(2^n\left(2\pi x\right)\right)$ שלילי אמ"מ

$2\pi k+\pi<2^n\left(2\pi\right)x<2\pi+2\pi k$ עבור איזשהו $k\in\mathbb{Z}$ נקבל כי זה שקול ל

$\frac{k}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}<x<\frac{k}{2^n}+\frac{1}{2^n}$. ה x-ים היחידים שעבורם אי השוויון לא מתקיים עבור n

מספיק גדול ואף k אלו הכפולות של חזקות של $\frac{1}{2}$ שעבורם נקבל ש

$\sin\left(2^n\left(2\pi x\right)\right)=0$ מ n מסויים (אחרת נקרב ע"י מספר בייצוג בינארי). מכאן ש

$$\underline{\lim}\left[1+\operatorname{sgn}\left(\sin\left(2^n\left(2\pi x\right)\right)\right)\right]=\begin{cases}1 & x=\frac{m}{2^M},M\in\mathbb{N},m\in\mathbb{Z}\\0 & otherwise\end{cases}$$

מכיוון שמספר ה x-ים עבורם נקבל 1 הינו בן מנייה, המידה של קבוצה זו היא 0 ולכן בסך הכל קיבלנו

$$\int\underline{\lim}\left[1+\operatorname{sgn}\left(\sin\left(2^n\left(2\pi x\right)\right)\right)\right]=0<\infty$$

3. תהי $f_n:X\to\mathbb{R}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות כך ש $f_n\to f$ במידה שווה. הראו כי אם $\mu\left(X\right)<\infty$ אזי f אינגרבילית וגם $\int f_n\to\int f$.

פתרון: עפ"י למת פאטו נובע כי $\int\underline{\lim}f_n=\int f\le\underline{\lim}\int f_n<\infty$ ומכאן ש f אינטגרבילית.

מכיוון שההתכנסות הינה במידה שווה, נובע כי לכל $\varepsilon>0$ קיים n גדול מספיק עבורו $\left|f-f_n\right|<\varepsilon$ לכל x. מכאן ש $\int\left|f-f_n\right|<\varepsilon\mu\left(X\right)$. מכיוון שהדבר נכון לכל ε נובע כי $\int\left|f-f_n\right|=0$. נשים לב כי

$\left|\int f-f_n\right|\le\int\left|f-f_n\right|$ וסיימנו.