

# תרגיל 10

## 1 חזרה לקראת הבוחן

1. יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי ותהי  $A \subseteq X$  תת קבוצה. הוכיחו שאם  $(A, d)$  שלמה אז  $A$  סגורה ב- $X$ .

2. יהי  $(V, \|\cdot\|)$  מרחב נורמי ותהי  $A \subseteq V$  קבוצה חסומה. נגדיר את הקונוס הקמור והמאוזן סביב  $A$  על ידי

$$bcone(A) := \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1, \forall 1 \leq i \leq n : x_i \in A \right\}$$

הוכיחו ש- $bcone(A)$  חסומה גם היא.

3. הראו שהרכבה של פונקציות ליפשיץ היא עדיין פונקציית ליפשיץ. כלומר, אם  $(X, d), (Y, \rho), (Z, \nu)$  הם מרחבים מטריים ו- $f : X \rightarrow Y$  ו- $g : Y \rightarrow Z$  הן ליפשיץ, אז גם  $g \circ f : X \rightarrow Z$  היא ליפשיץ.

4. הראו שכל תת קבוצה דיסקרטית של  $\mathbb{R}$  היא לכל היותר בת מניה.

5. יהי  $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי ו- $A, B \subseteq X$ . השלימו את יחסי ההכלה בין הקבוצות הבאות אם יש כאלה, הביאו דוגמאות אם לא.

$$(א) \overline{A \cap B} \text{ ו-} \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$(ב) \overline{A \cup B} \text{ ו-} \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$(ג) (A \cap B)^\circ \text{ ו-} A^\circ \cap B^\circ$$

$$(ד) (A \cup B)^\circ \text{ ו-} A^\circ \cup B^\circ$$

6. תהי  $(P, <)$  קבוצה סדורה לינארית עם טופולוגיית הסדר  $\tau_{<}$ . נניח גם שבין כל שני אברים של  $P$  קיים איבר שלישי ושב- $P$  יש יותר מאיבר אחד. הראו ש- $A \subseteq P$  היא צפופה אם ורק אם בין כל שני אברים של  $P$  קיים איבר של  $A$ .

7. הראו שספרביליות אינה תורשתית, כלומר מצאו מרחב טופולוגי ספרבילי עם תת מרחב שאינו ספרבילי.

8. הוכיחו או הפריכו: חיתוך של קבוצות מושלמות הוא מושלם.
9. הראו שכל מרחב האוסדורפי ממימד אפס הוא גם  $T_{2\frac{1}{2}}$  כלומר ניתן להפרדה פונקציונלית בין נקודות.
10. השתמשו בפונקציות רציפות כדי להוכיח שכל קבוצה סגורה במרחב מטרי היא  $G_\delta$ . הסיקו שכל קבוצה פתוחה במרחב מטרי היא  $F_\sigma$ .
11. מצאו דוגמה למרחב לא מטריזבילי, הוכיחו את טענתכם.
12. הוכיחו או הפריכו: הסגור של קבוצה קשירה מסילתית ב- $\mathbb{R}$  הוא קשיר מסילתית.
13. תנו דוגמה לתת מרחב של  $\mathbb{R}$  שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

## 2 קומפקטיות

1. יהי  $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי ותהי  $\{x_n\} \subseteq X$  סדרה שמתכנסת ל- $x \in X$ . הוכיחו ש- $\{x\} \cup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  היא קבוצה קומפקטית.
2. הוכיחו או הפריכו:  $(X, \tau_{cof})$  קומפקטית.
3. הוכיחו שמספיק לבדוק קומפקטיות לפי אברי בסיס. כלומר, אם  $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי ו- $A \subseteq X$  בסיס ל- $\tau$ . אז  $A$  קומפקטית אם ורק אם לכל כיסוי של  $A$  עם איברים של  $\tau$  יש תת כיסוי סופי.
4. מתי הטופולוגיה הקומפקטית היא קומפקטית?
5. הראו ש- $([0, 1], \tau_s)$  כלומר הקטע הסגור עם טופולוגיית סורגנפריי אינו קומפקטי.
6. נניח ש- $(X, d)$  מרחב מטרי ו- $A, K \subseteq X$  כאשר  $K$  קומפקטית. הוכיחו שקיימת  $x_0 \in K$  כך ש- $d(K, A) = d(x_0, A)$ .
- (א) הוכיחו שאם  $A$  קומפקטית, אז קיים גם  $a_0 \in A$  כך ש- $d(K, A) = d(x_0, a_0)$ .