

י"ט אלול תשס"ט, 8.9.09

חשבון אינפיניטיסימלי 2: 88-133-08

מועד ב'

זמן הבחינה: 120 דקות. חומר עזר אינו מותר למעט מחשבון פשוט. המבחן הוא בן שני עמודים. משקל כל שאלה הוא 20 נקודות.

חלק א' – ענה על שלוש שאלות מתוך הארבע:

שאלה 1. תהא $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a, b]$ ו- $g(x)$ בעלת נגזרת רציפה בקטע $[c, d]$. הוכח כי הפונקציה המורכבת $g(f(x))$ היא אינטגרבילית בקטע $[a, b]$.

פתרון.

עפ"י רימן צריך להראות שני תנאים:

1. $g \circ f$ חסומה בקטע $[c, d]$.

2. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה T עברה: $\lambda(T) < \delta$ יתקיים: $\left| \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \right| < \varepsilon$.

ואכן, כיוון שהפונקציה $g \circ f$ היא הרכבה של פונקציות רציפות (גזירות של g גוררת רציפות) היא רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ ולפיכך היא גם חסומה בו (משפט ווירשטראס).

כמו כן, לכל תת-קטע $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ בכל חלוקה שהיא, נסמן:

$$\omega_i^f = M_i^f - m_i^f \quad \text{כאשר: } m_i^f = \min_{I_i} f \quad \text{ו-} \quad M_i^f = \max_{I_i} f$$

ו- $\omega_i = M_i - m_i$ כאשר: $m_i = \min_{I_i} g \circ f$ המתקבל בנקודה: x_{i_m} ו- $M_i = \max_{I_i} g \circ f$ המתקבל בנקודה: x_{i_M} .

$$\omega_i = g(f(x_{i_M})) - g(f(x_{i_m}))$$

עפ"י לגרנז', כיון ש- g גזירה בקטע $[c, d]$ קיימת נקודה c_i בין $f(x_{i_m})$ ל- $f(x_{i_M})$ בה:

$$g(f(x_{i_M})) - g(f(x_{i_m})) = (f(x_{i_M}) - f(x_{i_m})) g'(c_i)$$

אבל g רציפה ב- $[c, d]$ ולכן היא מקבלת שם ערך מקסימלי $g'(c_M)$ ולכן:

$$g(f(x_{i_M})) - g(f(x_{i_m})) \leq (f(x_{i_M}) - f(x_{i_m}))g'(c_M)$$

מכאן נקבל בסה"כ את הקשר: $\omega_i \leq \omega_i^f \cdot g'(c_M)$.

כעת כיוון ש- f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$, לכל $\varepsilon > 0$ נמצא עבור $\frac{\varepsilon}{g'(c_M)}$ את δ כך שאם $\lambda(T) < \delta$

יתקיים: $\left| \sum_{i=1}^n \omega_i^f \Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{g'(c_M)}$ וכתוצאה מהקשר הנ"ל נקבל: $\left| \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \right| \leq \left| g'(c_M) \cdot \sum_{i=1}^n \omega_i^f \Delta x_i \right| < \varepsilon$.

שאלה 2. תהא $\{f_n(x)\}$ סדרה של פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$ שמתכנסת לפונקציה גבולית $f(x)$ שם.

א. הוכח שאם ההתכנסות היא במידה שווה אז $f(x)$ רציפה בקטע.

ראה בהרצאה.

ב. הוכח או הפרך: אם $f(x)$ רציפה בקטע אז ההתכנסות היא בהכרח במידה שווה שם.

לא: למשל הסדרה $\{x^n\}$ מתכנסת לפונקציה גבול רציפה $f(x) = 0$ בקטע $[0, 1)$ אך ההתכנסות שם

היא אינה במידה שווה. נראה זאת עפ"י מבחן ה- \limsup : $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1)} \{x^n\} = 1 \rightarrow 1 \neq 0$.

שאלה 3. תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת לכל $x > 0$ כך ש: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ אך f אינה שווה זהותית לאפס

בקטע $(0, \infty)$. נגדיר סדרת פונקציות: $f_n(x) = f(nx)$. לאיזו פונקציה גבול היא מתכנסת? האם ההתכנסות היא

במידה שווה?

פתרון: תחילה נחשב את פונקציה הגבול: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(nx) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

טענה: ההתכנסות לאפס היא אינה במידה שווה.

הוכחה: כיוון שהפונקציה אינה שווה זהותית לאפס, קיימת לפחות נקודה אחת $x_0 > 0$ בה: $f(x_0) \neq 0$. כעת אם

ניקח למשל עבור כל $n \in \mathbb{N}$ את הנקודה $x_n = \frac{x_0}{n}$ נקבל:

$$f_n(x_n) = f_n\left(\frac{x_0}{n}\right) = f(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0) \neq 0$$

ובפרט תנאי ה- \limsup אינו מתקיים.

שאלה 4. תהא $f(x, y)$ פונקציה מוגדרת במלבן $D = [-1, 1]^2$ ונתון שלכל $y_0 \in [-1, 1]$ קבוע הפונקציה

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

היא רציפה. נניח גם כי הנגזרת $f_y(x, y)$ קיימת וחסומה בכל D .

הוכח כי $f(x, y)$ רציפה ב- D .

פתרון: צ"ל שבכל נקודה $x_0, y_0 \in D$ מתקיים:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < |x - x_0| < \delta \wedge 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

$$\text{נכתוב: } |f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|$$

נתון כי עבור כל $x \in [-1, 1]$ קבוע הפונקציה: $\psi(y) = f(x, y)$ היא גזירה ונגזרתה חסומה בקטע $y \in [-1, 1]$

$$\text{ולכן עפ"י משפט לגרנז': } \psi'(y_0) = \frac{\psi(y) - \psi(y_0)}{y - y_0} \leq C \text{ כלומר:}$$

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| = |\psi(y) - \psi(y_0)| \leq C \cdot |y - y_0|$$

$$\text{מכאן שעבור } \varepsilon/2 \text{ אם ניקח: } \delta_1 < \frac{\varepsilon}{2C} \text{ נקבל: } |f(x, y) - f(x, y_0)| \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \frac{\varepsilon}{2}$$

כמו כן נתון כי: $\varphi(x) = f(x, y_0)$ רציפה, ולכן בפרט עבור $\varepsilon/2$ קיימת $\delta_2 > 0$ כך ש:

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon/2$$

על כן אם ניקח: $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ נקבל עפ"י אי שוויון המשולש:

$$0 < |x - x_0| < \delta \wedge 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

חלק ב' - ענה על שתי שאלות מתוך השלוש:

שאלה 5. מצא את נקודות הקיצון המקומיות של הפונקציה: $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$.

איזו תופעה מתרחשת כאן שאינה יכולה להתרחש במקרה של פונקציות של משתנה אחד?

פתרון:

שאלה 6. א. קבע האם האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x \ln x} dx$ מתכנס.

ב. קבע עבור אילו ערכי α האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$ מתכנס.

פתרון:

א. נפצל את האינטגרל לשני תחומים: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x \ln x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x \ln x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x \ln x} dx$

האינטגרל הראשון הוא אינו אמיתי מסוג שני בסביבה ימנית של האפס. מבחן השוואה הגבולי נותן שם:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x \ln x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

כלומר: $\frac{1}{\sqrt{x}} \gg \frac{\sin x}{x \ln x}$ וכיוון שהאינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ מתכנס גם שלנו.

האינטגרל השני הוא אינו אמיתי מסוג ראשון. נשים לב כי מתקיימים תנאי משפט דריכלה:

שתי הפונקציות $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x \ln x}$ וגם $g'(x)$ רציפות בקטע $(1, \infty)$, הפונקציה $\int_1^x \sin t dt$

סומה שם $0 \rightarrow g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ מונוטונית. על כן האינטגרל מתכנס. על כן בסה"כ האינטגרל כולו מתכנס.

ב. גם כאן נפצל את האינטגרל לשני תחומים: $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx + \int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$

האינטגרל הראשון: ניעזר במבחן השוואה הגבולי:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\arctan x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-1}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x} \stackrel{L'Hopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

כלומר האינטגרל שלנו "חבר" של האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$ שכידוע מתכנס עבור: $\alpha < 2 \Leftrightarrow \alpha - 1 < 1$

האינטגרל השני: כאן המבחן הגבולי נותן: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\arctan x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

כלומר החברות כאן היא עם $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ שכידוע מתכנס עבור $\alpha > 1$.

ולכן בשה"כ ההתכנסות היא עבור הערכים: $1 < \alpha < 2$.

שאלה 7. חשב את סכום הטור $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. נמק את צעדיך.

(הדרכה: אפשר לחשב: $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.)

פתרון: נכתוב: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \Big|_{x=\frac{1}{2}}$ ונשים לב כי: $nx^n = x \cdot (x^n)'$.

לפיכך: $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$.

רדיוס ההתכנסות של טור החזקות ולפיכך גם הרדיוס של טור הנגזרות הוא $R = 1$ (משפט).

לכן המעבר מטור של נגזרות לגזירה של הטור היה מוצדק בתחום הסגור $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ שהוא כולו מוכל בתחום

ההתכנסות טור הנגזרות מתכנס במידה שווה.

באותו האופן נשים לב כי: $(x^n)'' = n(n-1)x^{n-2}$ ומכאן:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)'' = x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)'' = x^2 \cdot \left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

לכן בתחום $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ נקבל בשה"כ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x^2 + x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$$

החיבור הזה מותר שכן שני הטורים מתכנסים בהחלט בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ שהוא בתוך רדיוס ההתכנסות ולכן מותר

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 6$$

לסכום את סך האיברים בכל סדר. נקבל: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ ו- $\frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$.