מד"ר - תרגול 10

11 בינואר 2014

התמרות לפלס

נוסחאות שבהן נשתמש במהלך התרגול

1. $L(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$
2. $L(cosat) = \frac{s}{s^2+a^2}$
3. $L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$
4. $L(t^n) = \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}}$
5. $L\left(f'(t)\right) = sL(f(t)) - f(0)$
6. $L(e^{at}f(t)) = L\left(f(t)\right)(s-a)$

דוגמה 1: מצא את המקור של $g(s) = \frac{1}{s^2+10s+41}$

פתרון:

נעשה השלמה לריבוע:

$$g(s) = \frac{1}{s^2+10s+41} = \frac{1}{(s+5)^2+16} \overset{\textbf{formulas (1) and (6)}}{\longleftarrow} \frac{1}{4}e^{-5t}\sin(4t)$$

דוגמה 2: מצא את התמרת לפלס של $f''(t)$.

פתרון:

$$L\left(f''(t)\right) \underset{(5)}{=} sL\left(f'(t)\right) - f'(0) = \underset{(5)}{=} s^2L\left(f(t)\right) - sf(0) - f'(0)$$

הערה:

עבור $n \in \mathbb{N}$ כללי נקבל:

$$L\left(f^{(n)}(t)\right) = s^nL\left(f(t)\right) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

דוגמה 3: מצא את המקור של $g(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+10}$.

פתרון:

$$\frac{s+3}{s^2+2s+10} = \frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+3^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + \frac{2}{(s+1)^2+3^2} \longleftarrow e^{-t}\cos(3t) + \frac{2}{3}e^{-t}\sin(3t)$$

דוגמה 4: פתור את המד"ר הבאה באמצעות התמרות לפלס: $\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \sin t \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 2 \end{cases}$.

פתרון: נעשה התמרת לפלס לב2 הצדדים:

$$\begin{aligned} L(x(t)) &= X(s) \\ s^2x(s) - sx(0) - x\prime(0) + 2sx(s) - 2x(0) + sx(s) &= \frac{1}{s^2+1} \\ (s^2+2s+5)x(s) &= \frac{1}{s^2+1} + s + 4 = \frac{1+s^3+s+4s^2+4}{s^2+1} \\ x(s) &= \frac{s^3+4s^2+s+5}{(s^2+2s+5)(s^2+1)} \end{aligned}$$

פירוק לשברים חלקים:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{as+b}{s^2+2s+5} + \frac{cx+d}{s^2+1} \\ s^3+4s^2+s+5 &= as^3+bs^2+as+b+cs^3+2cs^2+5cs+ds^2+2ds+5d \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+c=1 \\ b+2c+d=4 \Rightarrow 5+2c-4d=4 \Rightarrow 2c=4d-1 \\ a+5c+d=1 \\ b+5d=5 \Rightarrow b=5-5d \end{cases}$$

$$c = 2d - \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} a+2d=\frac{3}{2} \\ a+10d-2.5+2d=1 \Rightarrow a+12d=\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 10d &= 2 \\ d &= 0.2 \Rightarrow a = \frac{3}{2} - \frac{2}{5} = \frac{11}{10} \\ c &= \frac{2}{5} \\ b &= 5-1=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{\frac{11}{10}s+4}{s^2+2s+5}+\frac{\frac{-1}{10}s+\frac{1}{5}}{s^2+1} \\ x(s) &= \frac{11}{10}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+\frac{29}{20}\cdot\frac{2}{(s+1)^2+2^2}-\frac{1}{10}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

ולכן נקבל:

$$x(t)=\frac{11}{10}e^{-t}\cos(2t)+\frac{29}{20}e^{-t}\sin(2t)-\frac{1}{10}\cos(t)+\frac{1}{5}\sin(t)$$

דוגמה 5:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t)+4\dot{x}(t)+4x(t)=e^{5t}+\sin(4t) \\ x(0)=\dot{x}(0)=0 \end{cases}$$

פתרון:

$L(x(t)=x(s)$. נקבל:

$$\begin{aligned} s^2x(s)+4sx(s)+4x(s)+4x(s) &= \frac{1}{s-5}+\frac{4}{s^2+4^2} \\ (s^2+4s+4)x(s) &= \frac{1}{s-5}+\frac{4}{s^2+4^2} \\ x(s) &= \frac{1}{(s-5)(s+2)^2}+\frac{4}{(s+2)^2(s^2 - \\ x(s) &= \frac{a}{s-5}+\frac{bs+c}{s^2+16}+\frac{d}{(s+2)^2}+ \\ (s^2+16)(s^2+4s+4)+4(s-5)(s^2+4s+4) &= a(s^2+16)(s+2)^2+(bs+c)(s \\ s^4+4s^3+4s^2+16s^2+64s+64+4s^3+16s^2+16s-5s^2-20s-20 &= as^4+4as^3+4as^2+16as^2+6 \\ & +4bs^2+4cs+... \end{aligned}$$

[ניתן לפתח את ההמשך ב$MuPAD$]. השאלה בדרך הזאת ארוכה ועדיף לפתור בדרך הרגילה.
בדרך הרגילה נקבל:
הומוגנית:

$$\begin{aligned} \ddot{x}+4\dot{x}+4x &= 0 \\ r^2+4r+4 &= 0 \\ r &= -2 \\ x_n(t) &= e^{-2t}(c_1+c_2t) \end{aligned}$$

לא הומוגנית: ננחש פתרון פרטי מהצורה:

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= ae^{5t} + b\sin(4t) + c\sin(4t) \\
\dot{x_p}(t) &= 5ae^{5t} + 4b\cos 4t - 4c\sin 4t \\
\ddot{x}_p(t) &= 25ae^{5t} - 16b\sin 4t - 16c\cos 4t \\
49ae^{5t} + \sin 4t\,(-16b - 16c + 4b) + \cos 4t(-16c + 16b + 4c) &= e^{5t} + \sin 4t
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 49a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{49} \\ -12b - 16c = 1 \\ 12c - 16b = 0 \Rightarrow c = \frac{-4}{3}b \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
-3b + \frac{16}{3}b &= 1 \\
\frac{7}{3}b = 1 &\Rightarrow b = \frac{3}{7}, c = -\frac{4}{7} \\
x(t) &= x_h(t) + x_p(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2 t) + \frac{1}{49}e^{5t} + \frac{3}{7}\sin 4t - \frac{4}{7}\cos 4t
\end{aligned}$$

נציב תנאי התחלה:

$$\begin{aligned}
x(0) &= c_1 + \frac{1}{49} - \frac{4}{7} = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{27}{49} \\
\dot{x}(t) &= -2e^{-2t}(c_1 + c_2 t) + c_2 e^{-2t} + \frac{5}{49}e^{5t} + \frac{12}{7}\cos 4t - \frac{16}{7}\sin 4t \\
\dot{x}(0) &= -\frac{54}{49} + c_2 + \frac{5}{49} + \frac{12}{7} = 0 \\
c_2 &= \frac{54 - 5 - 84}{49} = \frac{-5}{7}
\end{aligned}$$