

מד"ר - תרגול 10

14 בינואר 2014

התמרות לפלס

נוסחאות שבהן נשתמש במהלך התרגול

$$L(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2} \quad .1$$

$$L(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2} \quad .2$$

$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \quad .3$$

$$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad .4$$

$$L(f'(t)) = sL(f(t)) - f(0) \quad .5$$

$$L(e^{at}f(t)) = L(f(t))(s-a) \quad .6$$

טבלה מורחבת

דוגמה 1: מצא את המקור של $g(s) = \frac{1}{s^2+10s+41}$

פתרון:

נעשה השלמה לריבוע:

$$g(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 41} = \frac{1}{(s+5)^2 + 16} \quad \text{formulas (1) and (6)} \quad \frac{1}{4} e^{-5t} \sin(4t)$$

דוגמה 2: מצא את התמרת לפלס של $f''(t)$.

פתרון:

$$L(f''(t)) \stackrel{(5)}{=} sL(f'(t)) - f'(0) \stackrel{(5)}{=} s^2L(f(t)) - sf(0) - f'(0)$$

הערה:

עבור $n \in \mathbb{N}$ כללי נקבל:

$$L(f^{(n)}(t)) = s^n L(f(t)) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

דוגמה 3: מצא את המקור של $g(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+10}$

פתרון:

$$\frac{s+3}{s^2+2s+10} = \frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+3^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + \frac{2}{(s+1)^2+3^2} \leftarrow e^{-t} \cos(3t) + \frac{2}{3} e^{-t} \sin(3t)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \sin t \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 2 \end{cases} \quad \text{דוגמה 4: פתור את המד"ר הבאה באמצעות התמרות לפלס:}$$

פתרון: נעשה התמרת לפלס לל הצדדים:

$$\begin{aligned} L(x(t)) &= X(s) \\ s^2x(s) - sx(0) - x'(0) + 2sx(s) - 2x(0) + sx(s) &= \frac{1}{s^2+1} \\ (s^2+2s+5)x(s) &= \frac{1}{s^2+1} + s + 4 = \frac{1+s^3+s+4s^2+4}{s^2+1} \\ x(s) &= \frac{s^3+4s^2+s+5}{(s^2+2s+5)(s^2+1)} \end{aligned}$$

פירוק לשברים חלקים:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{as+b}{s^2+2s+5} + \frac{cx+d}{s^2+1} \\ s^3+4s^2+s+5 &= as^3+bs^2+as+b+cs^3+2cs^2+5cs+ds^2+2ds+5d \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a+c=1 \\ b+2c+d=4 \Rightarrow 5+2c-4d=4 \Rightarrow 2c=4d-1 \\ a+5c+d=1 \\ b+5d=5 \Rightarrow b=5-5d \end{cases}$$

$$c = 2d - \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} a+2d = \frac{3}{2} \\ a+10d-2.5+2d = 1 \Rightarrow a+12d = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 10d &= 2 \\ d &= 0.2 \Rightarrow a = \frac{3}{2} - \frac{2}{5} = \frac{11}{10} \\ c &= \frac{2}{5} \\ b &= 5 - 1 = 4 \end{aligned}$$

$$x(s) = \frac{\frac{11}{10}s + 4}{s^2 + 2s + 5} + \frac{\frac{-1}{10}s + \frac{1}{5}}{s^2 + 1}$$

$$x(s) = \frac{11}{10} \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{29}{20} \cdot \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$

ולכן נקבל:

$$x(t) = \frac{11}{10}e^{-t} \cos(2t) + \frac{29}{20}e^{-t} \sin(2t) - \frac{1}{10} \cos(t) + \frac{1}{5} \sin(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 4x(t) = e^{5t} + \sin(4t) \\ x(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{דוגמה 5}$$

פתרון:

נקבל: $L(x(t)) = x(s)$

$$s^2 x(s) + 4s x(s) + 4x(s) + 4x(s) = \frac{1}{s-5} + \frac{4}{s^2+4^2}$$

$$(s^2 + 4s + 4)x(s) = \frac{1}{s-5} + \frac{4}{s^2+4^2}$$

$$x(s) = \frac{1}{(s-5)(s+2)^2} + \frac{4}{(s+2)^2(s^2+4^2)}$$

$$x(s) = \frac{a}{s-5} + \frac{bs+c}{s^2+16} + \frac{d}{(s+2)^2} + \dots$$

$$(s^2 + 16)(s^2 + 4s + 4) + 4(s - 5)(s^2 + 4s + 4) = a(s^2 + 16)(s + 2)^2 + (bs + c)(s^2 + 16) + 4d(s + 2)^2$$

$$s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 16s^2 + 64s + 64 + 4s^3 + 16s^2 + 16s - 5s^2 - 20s - 20 = as^4 + 4as^3 + 4as^2 + 16as^2 + 64as + 64a + bs^2 + 16bs + cs^2 + 16cs + 4d(s^2 + 4s + 4) + \dots$$

[ניתן לפתח את ההמשך ב *MuPAD*]. השאלה בדרך הזאת ארוכה ועדיף לפתור בדרך הרגילה.

בדרך הרגילה נקבל:

הומוגנית:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$r = -2$$

$$x_n(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2 t)$$

לא הומוגנית: ננחש פתרון פרטי מהצורה:

$$\begin{aligned}x_p(t) &= ae^{5t} + b \sin(4t) + c \cos(4t) \\ \dot{x}_p(t) &= 5ae^{5t} + 4b \cos 4t - 4c \sin 4t \\ \ddot{x}_p(t) &= 25ae^{5t} - 16b \sin 4t - 16c \cos 4t \\ 49ae^{5t} + \sin 4t(-16b - 16c + 4b) + \cos 4t(-16c + 16b + 4c) &= e^{5t} + \sin 4t\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 49a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{49} \\ -12b - 16c = 1 \\ 12c - 16b = 0 \Rightarrow c = \frac{-4}{3}b \end{cases}$$

$$-3b + \frac{16}{3}b = 1$$

$$\frac{7}{3}b = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{7}, c = -\frac{4}{7}$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2t) + \frac{1}{49}e^{5t} + \frac{3}{7}\sin 4t - \frac{4}{7}\cos 4t$$

נציב תנאי התחלה:

$$x(0) = c_1 + \frac{1}{49} - \frac{4}{7} = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{27}{49}$$

$$\dot{x}(t) = -2e^{-2t}(c_1 + c_2t) + c_2e^{-2t} + \frac{5}{49}e^{5t} + \frac{12}{7}\cos 4t - \frac{16}{7}\sin 4t$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{54}{49} + c_2 + \frac{5}{49} + \frac{12}{7} = 0$$

$$c_2 = \frac{54 - 5 - 84}{49} = \frac{-5}{7}$$