שאלות לתרגול נוסף

1. תהי $K \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה שהסופרימום שלה הוא S.
   (א) הוכיחו כי קיים איבר $x \in K$ המקיים $S - \frac{1}{10} < x \leq S$.
   (ב) הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים איבר $x \in K$ המקיים $S - \varepsilon < x \leq S$.
2. יהיו $\{a_n\}, \{b_n\}$ סדרות המקיימות $a_n + b_n \to a + b$ וגם $a_n - b_n \to a - b$. הוכיחו כי $a_n \to a$ וכן $b_n \to b$.
3. עבור $x \in \mathbb{R}$, **הערך השלם** של x (מסומן $[x]$) מוגדר להיות המספר השלם m המקיים $m \leq x < m + 1$.
   לדוגמא: $[3.5] = 3,\ [7.1] = 7,\ [0] = 0,\ [-0.5] = -1$.
   (א) הוכיחו שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $x - 1 < [x] \leq x$.
   (ב) הוכיחו שהסדרה $a_n = \dfrac{[\frac{2}{3}n]}{n}$ מקיימת $a_n \to \dfrac{2}{3}$.
4. הסדרה $\{a_n\}$ מקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. הראו שלא בהכרח מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n] = [L]$.
5. הוכיחו שלסדרה $a_n = \dfrac{1}{2} sin(2^n)$ יש תת־סדרה מתכנסת במובן הצר (כלומר לגבול סופי).
6. כזכור, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. השתמשו בעובדה זו כדי להוכיח $\lim\limits_{n\to\infty} (1+n^2)^{\frac{1}{1+n^2}} = 1$.
7. הסדרה $\{a_n\}$ מקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
   (א) הראו שלא בהכרח מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^n = 1$.
   (ב) תנו דוגמא לסדרה $\{a_n\}$ כזו עבורה $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^n = e^3$.
8. הוכיחו: אם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(2x) = L$.
9. חשבו את הגבול של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x \geq 2 \\ \dfrac{x}{2} & x < 2 \end{cases}$$

   בנקודה $x = 2$.

10. עבור אילו ערכי a הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & x > 3 \\ x^2 & x \leq 3 \end{cases}$$

   רציפה בנקודה $x = 3$?

11. היעזרו בזהות הטריגונומטרית $cos(2\alpha) = 1 - 2sin^2(\alpha)$ על מנת לחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1 - cosx}{x^2}$.

12. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בסביבת $x=0$. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם f רציפה ב־$x=0$, אז גם f^2 רציפה ב־$x=0$.

(ב) אם f^2 רציפה ב־$x=0$, אז f רציפה ב־$x=0$.

13. הפונקציות f ו־g מוגדרות בסביבת הנקודה $x=5$, f רציפה ב־$x=5$ ו־g אינה רציפה ב־$x=5$.

(א) הוכיחו שאם $f(5)=0$ ו־g חסומה בסביבת $x=5$, אז $f\cdot g$ רציפה ב־$x=5$.

(ב) הוכיחו שאם $f\cdot g$ רציפה ב־$x=5$, אז $f(5)=0$.

14. הוכיחו שלפונקציה $f(x)=[x]$ (הערך שלם של x) יש נקודת אי־רציפות מסוג ראשון בנקודה $x=1$ (כלומר הגבולות החד־צדדיים בנקודה זו קיימים וסופיים, אך שונים).

15. הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה בכל נקודה ומקיימת $|f(x)|\leq 7$ לכל x. הוכיחו כי למשוואה $2x+f(x)=3$ קיים פתרון.

16. הוכיחו שאם $f:[0,10]\to\mathbb{R}$ רציפה, אז קיימת נקודה $x_0\in(0,10)$ כך ש־$f(x_0)=\dfrac{f(1)+f(8)}{2}$.

17. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\dfrac{sinx}{x}$ רציפה במ"ש בקטע $(0,1)$. רמז: הרחיבו את הפונקציה לקטע הסגור $[0,1]$.

18. הוכיחו לפי ההגדרה שהפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ אינה גזירה ב־$x=0$.

19. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=|x|$ רציפה ב־$x=0$ אך אינה גזירה שם.

20. חשבו את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+h}-1}{h}$ (רמז: מה הקשר בין גבול זה לבין הפונקציה $f(x)=\sqrt[5]{x}$?)