

# פיסיקה למתמטיקאים

## תנע קוי

1. ניסוח כללי של החוק השני של ניוטון

יהי  $\vec{p}$  התנע הכולל של גוף בעל מסה משתנה  $m(t)$  ו  $\vec{F}$  הכח הפועל על הגוף. אזי

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = m\vec{a} + v\frac{dm}{dt},$$

כאשר  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$  תאוצת הגוף.

### שימור התנע קוי

אם הכח שווה לאפס, התנע הקוי נשמר

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0.$$

### מרכז המסה

נניח מערכת המורכבת מ  $N$  גופים בעלי מסות  $m_1, m_2, \dots, m_N$ . מרכז המסה הינו הממוצע המשוכלל של המיקומים:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

משפט: התנע הכולל במערכת מרכז המסה שווה לאפס.

הוכחה: תהי  $\vec{v}_{cm} = d\vec{r}_{cm}/dt$  מהירות מרכז המסה, ותהי  $\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt$  מהירות המסות במערכת המעבדה. נסמן את התנע הכולל במערכת מרכז המסה ב  $\vec{p}'$ . אזי

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{cm}) = \sum_{i=1}^N m_i \left( \vec{v}_i - \frac{\sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j}{\sum_{j=1}^N m_j} \right) = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (m_i m_j \vec{v}_i - m_i m_j \vec{v}_j)}{\sum_{j=1}^N m_j} = 0 \end{aligned}$$

2. חללית פולטת דלק בקצב קבוע  $\alpha$  ובמהירות קבועה  $v_0$  (ביחס לכדור"ה). מסתה ההתחלתית (כולל הדלק)  $M_0$ .

(א) מצאו את מהירותה כפונקציה של הזמן  
הכח שפועל על המערכת חללית+דלק הוא המשקל הכולל  $M_0$ , לכן

$$\frac{d}{dt}(p_s + p_f) = \frac{dM}{dt}v + M\frac{dv}{dt} - \frac{dM}{dt}v_0 = M_0g$$

כאשר  $M = M_0 - \alpha t$  משקל החללית כפונקציה של הזמן. נקבל

$$-\alpha v + (M_0 - \alpha t)\frac{dv}{dt} + \alpha v_0 = M_0g.$$

מאינטגרציה על אגפי המשוואה

$$\frac{dv}{v - v_0 + M_0g/\alpha} = \frac{\alpha dt}{M_0 - \alpha t}$$

ומתנאי ההתחלה  $v(0) = 0$  נקבל

$$v(t) = \frac{M_0g - v_0\alpha}{M_0 - \alpha t}t.$$

(ב) מצאו את מיקומה כפונקציה של הזמן  
מאינטגרציה על המהירות ומתנאי ההתחלה  $x(0) = 0$  נקבל

$$x(t) = \int v(t)dt = -\frac{M_0g - v_0\alpha}{\alpha} \left[ t + \frac{M_0}{\alpha} \ln \left( 1 - \frac{\alpha}{M_0}t \right) \right]$$

(ג) מצאו את המהירות המינימלית בה נפלט הדלק על מנת שהחללית  
תברח משדה הגרביטציה של כדור"א, בהנחה ש 50% ממסת החללית  
הינה דלק.

מהירות הבריחה מכדור הארץ  $v_E$  מתקבלת (בקרו) משימור אנרגיה

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR_E$$

כאשר  $R_E$  רדיוס כדור"א, כלומר  $v_E = \sqrt{2gR_E}$ . על כן, אם ברגע  
שהחללית מתרוקנת מדלק מהירותה שווה ל  $v_E$ , נקבל

$$\frac{M_0g - v_0\alpha}{M_0/2} \frac{M_0}{2\alpha} = \sqrt{2gR_E},$$

ומהירות פליטת הדלק תהייה

$$v_0 = \frac{M_0 g}{\alpha} - \sqrt{2gR_E}.$$

נשים לב, כי קצב פליטת הדלק במקרה כזה צריך לקיים

$$\alpha > M_0 \sqrt{\frac{g}{2R_E}}.$$