פיסיקה למתמטיקאים

תנע קוי

1. חללית פולטת דלק בקצב קבוע α ובמהירות קבועה v_0 (ביחס לכדוה"א). מסתה ההתחלתית (כולל הדלק) M_0.

(א) מצאו את מהירותה כפונקציה של הזמן.

נסמן ב $M(t)$ את מסת החללית בזמן t. השינוי בתנע של החללית $p_s = M(t)v(t)$ נתון ע"י

$$\frac{dp_s}{dt} = -Mg + \alpha v_0,$$

כאשר αv_0 התוספת לתנע כתוצאה מפליטת הדלק. נקבל אפוא את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה עבור המהירות

$$\frac{dv}{dt} - \frac{\alpha}{M_0 - \alpha t}v = \frac{\alpha v_0}{M_0 - \alpha t} - g, \tag{1}$$

כאשר המסה נתונה ע"י $M(t) = M_0 - \alpha t$. פתרון משוואה (1) עם תנאי ההתחלה $v(0) = 0$ הינו

$$v(t) = \frac{2(\alpha v_0 - M_0 g)t + \alpha g t^2}{2(M_0 - \alpha t)}. \tag{2}$$

(ב) מצאו את מיקומה כפונקציה של הזמן.

מאינטגרציה על המהירות בתוספת תנאי ההתחלה $x(0) = 0$ נקבל

$$x(t) = \frac{(2M_0 g - \alpha g t - 4\alpha v_0)\alpha t + 2M_0(M_0 g - 2\alpha v_0)\ln(1 - \alpha t/M_0)}{4\alpha^2}.$$

(ג) מצאו את המהירות המינימלית בה נפלט הדלק כך שהחללית תימלט משדה הכבידה של כדוה"א, בהנחה ש 50% ממסתה הינה דלק.

מהירות הבריחה מכדוה"א v_E מתקבלת (בקרוב טוב) ממשוואת שימור האנרגיה

$$\frac{1}{2}mv_E^2 = mgR_E,$$

כאשר R_E רדיוס כדוה"א. מהצבת $t = M_0/2\alpha$ ב (2) והשוואה ל $v_E = \sqrt{2gR_E}$ נקבל את המהירות המינימלית

$$v_{0_{\min}} = \frac{3}{4}\frac{M_0 g}{\alpha} + \sqrt{8gR_E}.$$