

# פיסיקה למתמטיקאים

## תנע קוי

1. חללית פולטת דלק בקצב קבוע  $\alpha$  ובמהירות קבועה  $v_0$  (ביחס לכדור"א). מסתה ההתחלתית (כולל הדלק)  $M_0$ .

(א) מצאו את מהירותה כפונקציה של הזמן.

נסמן ב  $M(t)$  את מסת החללית בזמן  $t$ . השינוי בתנע של החללית נתון ע"י  $p_s = M(t)v(t)$

$$(1) \quad \frac{dp_s}{dt} = -Mg + \alpha v_0,$$

כאשר  $\alpha v_0$  התוספת לתנע כתוצאה מפליטת הדלק. נקבל אפוא את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה עבור המהירות

$$(2) \quad \frac{dv}{dt} - \frac{\alpha}{M_0 - \alpha t} v = \frac{\alpha v_0}{M_0 - \alpha t} - g,$$

כאשר המסה נתונה ע"י  $M(t) = M_0 - \alpha t$ .<sup>1</sup> פתרון משוואה (2) עם תנאי ההתחלה  $v(0) = 0$  הינו

$$(3) \quad v(t) = \frac{2(\alpha v_0 - M_0 g)t + \alpha g t^2}{2(M_0 - \alpha t)}.$$

(ב) מצאו את מיקומה כפונקציה של הזמן.

מאינטגרציה על המהירות בתוספת תנאי ההתחלה  $x(0) = 0$  נקבל

$$x(t) = \frac{(2M_0 g - \alpha g t - 4\alpha v_0)\alpha t + 2M_0(M_0 g - 2\alpha v_0) \ln(1 - \alpha t/M_0)}{4\alpha^2}.$$

(ג) מצאו את המהירות המינימלית בה נפלט הדלק כך שהחללית תימלט משדה הכבידה של כדור"א, בהנחה ש 50% ממסתה הינה דלק. מהירות הבריחה מכדור"א  $v_E$  מתקבלת (בקרום טוב) ממשוואת שימור האנרגיה

$$\frac{1}{2} m v_E^2 = m g R_E,$$

---

<sup>1</sup>נשים לב כי משוואה (1) תקפה עבור זמנים  $0 < t < t^*$  כאשר  $t^* \leq M_0/\alpha$

(3) כאשר  $R_E \simeq 6.3 \times 10^6 m$  רדיוס כדור הא"א. מהצבת  $t = M_0/2\alpha$  ב (3) והשוואה ל  $v_E = \sqrt{2gR_E}$  נקבל את המהירות המינימלית<sup>2</sup>

(4) 
$$v_{0\min} = \frac{3}{4} \frac{M_0 g}{\alpha} + \sqrt{8gR_E}.$$

---

<sup>2</sup>שני הביטויים באגף ימין של (4) מאותו סדר גודל עבור  $M_0 \sim 10^6 Kg$  (מסת מעבורת החלל Discovery למשל הינה 2030 טון) ו  $\alpha \sim 10^3 Kg/s$