

## פיסיקה למתמטיקאים

### תנע קוי עם מסה משתנה

1. חללית משוגרת מכדור הארץ ב  $t = 0$ . החללית פולטת דלק במהירות קבועה (ביחס לחללית)  $u$  ובקצב  $\alpha$ . מסתה ההתחלתית  $m_0$ .

(א) מצאו את מהירותה כפונקציה של הזמן  $v$

מסת החללית נתונה ע"י  $m = m_0 - \alpha t$ . ברגע  $t$  התנע של החללית (כולל הדלק)  $mv$ . ברגע  $t + dt$  מסתה  $m + dm$  ומהירותה  $v + dv$ . מסת הדלק הנפלט  $-dm$  ומהירותו  $v - u$ . השינוי בתנע שווה ל  $Fdt = -mgdt$ . אם כן

$$(1) \quad (m + dm)(v + dv) + (v - u)(-dm) - mv = -mgdt,$$

ובהנחת איברים מסדר שני נקבל

$$(2) \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha u}{m_0 - \alpha t} - g.$$

על כן

$$(3) \quad v = u \ln \left( \frac{m_0}{m_0 - \alpha t} \right) - gt$$

(ב) מצאו את מיקומה  $x$

מאינטגרציה על (3) נקבל

$$(4) \quad x = u \left[ \left( \frac{m_0}{\alpha} - t \right) \ln \left( 1 - \frac{\alpha}{m_0} t \right) + t \right] - \frac{1}{2}gt^2$$

(ג) מהו  $u$  המינימלי כך שהחללית בורחת משדה הגרביטציה של כדור הא"א

אם נתון ש 90% ממסתה הינו דלק,  $m_0 = 2 \times 10^6 Kg$ ,  $\alpha = 10^4 Kg/s$ , ורדיוס כדור הא"א  $R = 6.3 \times 10^6 m$ .

נניח כי ברגע הבריחה  $t_e$  החללית נמצאת בנקודה  $h$  כך ש  $h \ll R$ . משימור אנרגיה נקבל  $mv_e^2 = mgR$  ולכן מהירות הבריחה היא

$v_e = \sqrt{2gR}$ . רגע הבריחה הינו  $t_e = 0.9m_0/\alpha$ . התנאי לבריחה נתון ע"י  $v(t_e) \geq v_e$  ולכן מ (3) נקבל

$$(5) \quad u_{min} = (0.9m_0g/\alpha + \sqrt{2gR})/\ln 10 \simeq 20,360 Km/h.$$

2. חלקיק בעל מסה  $m$  ומטען  $q$  נע באזור בו פועלים שדות מגנטי וחשמלי אחידים וקבועים בכיוון  $\hat{z}$ ,  $\vec{B} = B\hat{z}$ ,  $\vec{E} = E\hat{z}$  בהתאמה.

(א) רשמו את משוואות התנועה

על החלקיק פועל כח לורנץ  $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$ . משוואות התנועה תיכתבנה אפוא וקטורית בצורה  $m\vec{a} = m\vec{v} = \vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$  וברכיבים:

$$m\dot{v}_x = qBv_y, \quad (6)$$

$$m\dot{v}_y = -qBv_x, \quad (7)$$

$$m\dot{v}_z = qE. \quad (8)$$

(ב) מצאו את המהירות בהינתן ש  $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$  נסמן  $\omega = qB/m$  ונקבל

$$v_x = v_0 \cos \omega t, \quad (9)$$

$$v_y = -v_0 \sin \omega t, \quad (10)$$

$$v_z = \frac{qE}{m}t. \quad (11)$$

(ג) מצאו את המיקום בהינתן שהתנועה מתחילה בראשית מאינטגרציה על המשוואות ב (9) ו (10) נקבל

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (12)$$

$$y = \frac{v_0}{\omega} (\cos \omega t - 1), \quad (13)$$

$$z = \frac{qE}{2m}t^2. \quad (14)$$

המסלול הינו בורג בעל חתך מעגלי  $(v_0/\omega)^2 = x^2 + (y + v_0/\omega)^2$  כמתואר בשרטוט.

(ד) כמה סיבובים יבצע החלקיק עד לגובה  $h$  ?

נסמן ב  $t_h$  את הרגע בו החלקיק בגובה  $h$ . עד לנקודה זו, יבצע לכל הפחות  $n$  סיבובים. כלומר  $nT \leq t_h \leq (n+1)T$  כאשר  $T = 2\pi/\omega$  זמן המחזור. על כן מספר הסיבובים הינו  $n_c = [t_h/T] = [B\sqrt{qh/2mE}/\pi]$  נשים לב כי מספר הסיבובים עולה עם השדה המגנטי  $B$  (התדירות הזוויתית) ויורד עם השדה החשמלי  $E$  (התאוצה בכיוון  $\hat{z}$ ).

$$x = \sin(t), y = \cos(t) - 1, z = t^2$$

