אביב תשע"ה

פיסיקה למתמטיקאים

תנע קוי עם מסה משתנה

1. חללית משוגרת מכדור הארץ ב $t = 0$. החללית פולטת דלק במהירות קבועה (ביחס לחללית) u ובקצב α. מסתה ההתחלתית m_0.

(א) מצאו את מהירותה כפונקציה של הזמן v

מסת החללית נתונה ע"י $m = m_0 - \alpha t$. ברגע t התנע של החללית (כולל הדלק) mv. ברגע $t + dt$ מסתה $m + dm$ ומהירותה $v + dv$. מסת הדלק הנפלט $-dm$ ומהירותו $v - u$. השינוי בתנע שווה ל $Fdt = -mgdt$. אם כן

$$(m + dm)(v + dv) + (v - u)(-dm) - mv = -mgdt, \tag{1}$$

ובהזנחת איברים מסדר שני נקבל

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha u}{m_0 - \alpha t} - g. \tag{2}$$

על כן

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right) - gt \tag{3}$$

(ב) מצאו את מיקומה x

מאינטגרציה על (3) נקבל

$$x = u\left[\left(\frac{m_0}{\alpha} - t\right)\ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}t\right) + t\right] - \frac{1}{2}gt^2 \tag{4}$$

(ג) מהו u המינימילי כך שהחללית בורחת משדה הגרביטציה של כדוה"א אם נתון ש 90% ממסתה הינו דלק, $m_0 = 2 \times 10^6 Kg$, $\alpha = 10^4 Kg/s$ ורדיוס כדוה"א $R = 6.3 \times 10^6 m$.

נניח כי ברגע הבריחה t_e החללית נמצאת בנקודה h כך ש $h << R$. משימור אנרגיה נקבל $mv_e^2/2 = mgR$ ולכן מהירות הבריחה היא $v_e = \sqrt{2gR}$. רגע הבריחה הינו $t_e = 0.9 m_0/\alpha$. התנאי לבריחה נתון ע"י $v(t_e) \geq v_e$ ולכן מ (3) נקבל

$$u_{min} = (0.9 m_0 g/\alpha + \sqrt{2gR})/\ln 10 \simeq 20,360 Km/h. \tag{5}$$

2. חלקיק בעל מסה m ומטען q נע באזור בו פועלים שדות מגנטי וחשמלי אחידים וקבועים בכוון $\hat{z}$, $\vec{E}=E\hat{z}, \vec{B}=B\hat{z}$ בהתאמה.

(א) רשמו את משוואות התנועה

על החלקיק פועל כח לורנץ $\vec{F}_L=q(\vec{v}\times\vec{B}+\vec{E})$. משוואות התנועה תיכתבנה אפוא וקטורית בצורה $m\vec{a}=m\dot{\vec{v}}=\vec{F}_L=q(\vec{v}\times\vec{B}+\vec{E})$, וברכיבים:

$$
\begin{aligned}
m\dot{v}_x &= qBv_y, &(6)\\
m\dot{v}_y &= -qBv_x, &(7)\\
m\dot{v}_z &= qE. &(8)
\end{aligned}
$$

(ב) מצאו את המהירות בהינתן ש $\vec{v_0}=(v_0,0,0)$

נסמן $\omega=qB/m$ ונקבל

$$
\begin{aligned}
v_x &= v_0\cos\omega t, &(9)\\
v_y &= -v_0\sin\omega t, &(10)\\
v_z &= \frac{qE}{m}t. &(11)
\end{aligned}
$$

(ג) מצאו את המיקום בהינתן שהתנועה מתחילה בראשית

מאינטגרציה על המשוואות ב (2ב) נקבל

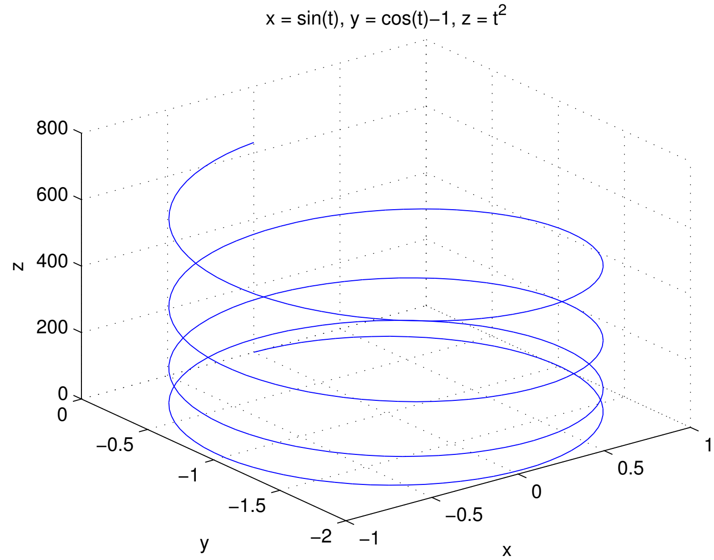
$$
\begin{aligned}
x &= \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, &(12)\\
y &= \frac{v_0}{\omega}(\cos\omega t-1), &(13)\\
z &= \frac{qE}{2m}t^2. &(14)
\end{aligned}
$$

המסלול הינו בורג בעל חתך מעגלי $x^2+(y+v_0/\omega)^2=(v_0/\omega)^2$, כמתואר בשרטוט.

(ד) כמה סיבובים יבצע החלקיק עד לגובה h ?

נסמן ב t_h את הרגע בו החלקיק בגובה h. עד לנקודה זו, יבצע לכל הפחות n סיבובים. כלומר $nT\le t_h\le(n+1)T$ כאשר $T=2\pi/\omega$ זמן המחזור. על כן מספר הסיבובים הינו $n_c=[t_h/T]=[B\sqrt{qh/2mE}/\pi]$.

נשים לב כי מספר הסיבובים עולה עם השדה המגנטי B (התדירות הזויתית) ויורד עם השדה החשמלי E (התאוצה בכוון $\hat{z}$).



x = sin(t), y = cos(t)−1, z = t^2
800
600
400
200
0
z
0
−0.5
−1
−1.5
−2
y
−1
−0.5
0
0.5
1
x