

תרגיל בית 2 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. למי שרוצה להתנסות בעוד משחק של בניית בסרגל ומחוגה מוזמן לנסות את המשחק [Euclidea](#). זה מספיק ממכר שכדאי לוודא שנשאר זמן לשאר תרגיל הבית.

שאלה 2. תהי K/F הרחבת שדות. נתבונן בחוג הפולינומים $K[x]$ ובשדה הפונקציות הרציונליות $F(x)$, ונחשוב על שניהם כתת-קבוצות של $K(x)$. הוכיחו $F(x) \cap K[x] = F[x]$.

שאלה 3. תהי K/F הרחבת שדות. יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום מדרגה $n \geq 1$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם a איבר אלגברי מעל K אז הוא אלגברי מעל F .

ב. אם a איבר אלגברי מעל F אז הוא אלגברי מעל K .

ג. אם a איבר אלגברי מעל F אז גם $\alpha \cdot a$ הוא אלגברי לכל $\alpha \in F$.

שאלה 4. תהי K/F הרחבה סופית (כלומר $[K : F] < \infty$). הוכיחו כי כל איבר של K הוא אלגברי מעל F . רמז: חשבו על הקבוצה $\{1, a, a^2, a^3, \dots\}$. רשות: להרחבה כמו בשאלה קוראים הרחבה אלגברית. האם כל הרחבה אלגברית היא סופית?

שאלה 5. הוכיחו כי $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

שאלה 6. יהי F שדה, ותהי $G \leq F^*$ תת-חבורה סופית של החבורה הכפלית של השדה. הוכיחו כי G ציקלית. הדרכה: העזרו בתורת המבנה של חבורות אבליות סופיות ובחישוב $\exp(G)$.

בהצלחה!