תרגיל בית 6 אינפי 3

1. משטח נתון על ידי המשוואה $z = e^{-x^2-2y^2}$.

(א) מצאו $P = (x_0, y_0, z_0)$ נקודה על המשטח, כך שאם יניחו עליה כדור, הוא יתחיל לנוע בכיוון $(2, 1, a)$ עבור a כלשהוא. מצאו גם את a.

(ב) מצאו נקודה על המשטח שאם יניחו עליה את הכדור הוא לא יזוז לשום מקום.

2. תהי $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בכל המישור $\mathbb{R}^2$. נתון

$$\frac{\partial f}{\partial u}(7,1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(7,1) = 3$$

. נגדיר:

$$u(x, y) = 2x + 3y \quad v(x, y) = x - y$$

$$z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

חשב את $\frac{\partial z}{\partial x}(2, 1)$ ואת $\frac{\partial z}{\partial y}(2, 1)$.

3. תהי $f(x, y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות בקבוצה $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$. נתון כי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש

$$xf'_x + yf'_y = nf$$

לכל $(x, y) \in D$. הוכיחו כי

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

לכל $t > 0$ ו $(x, y) \in D$.

<u>הדרכה</u>: הגדירו

$$F(t) = \frac{f(tx, ty)}{t^n}$$

והוכיחו כי F קבועה.

4. נתונה פונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

מצא את $f''_{xy}(0,0)$ ואת $f''_{yx}(0,0)$.

5. תהי $f(x,y)$ פונקציה גזירה ברציפות פעמיים בתחום $D=(0,\infty)\times(0,\infty)$. ונניח ש x,y מבוטאים באמצעות s,t לפי $x=e^{s+t}, \quad y=e^{s-t}$ כך שניתן להגדיר הרכבה

$$g(s,t)=f(x(s,t),y(s,t))$$

הוכח כי

$$g_{st}=0 \Leftrightarrow x^2f_{xx}+xf_x=y^2f_{yy}+yf_y$$

6. (א) מצאו את פולינום טיילור סביב הנקודה $(1,0)$ עד סדר 2 עם שארית לגרנז' של $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

(ב) מצאו את פולינום טיילור סביב הנקודה $(0,0)$ עד סדר 5 של $f(x,y)=e^{x^2}sin(2y)$

7. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, כתבו מחדש את הפולינום x^3+xy+y^2 כך שהוא יהיה פולינום של $x-a, \quad y-b$.

8. כתבו את פיתוח טיילור של $f(x,y)=sin(xe^y)$ סביב הנקודה $(\frac{\pi}{2},0)$ עד סדר 2.

9. תהי $f(x,y)=e^{x^2y^3}$.

(א) כתבו פיתוח טיילור של f סביב $(0,0)$ עד סדר 19.

(ב) חשבו את $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x^8\partial^{11}}$