פיסיקה למתמטיקאים

פונקצית יעקבי

1. חרוז בעל מסה m החפשי לנוע על חישוק עם רדיוס R המסתובב במהירות זויתית ω סביב ציר $\hat{z}$.

ראינו כי הלגראנג'יאן של החרוז הוא

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta - mgR\cos\theta,$$

ופונקצית יעקבי היא

$$h = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta + mgR\cos\theta,$$

ואילו האנרגיה היא

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta + mgR\cos\theta,$$

ושונה מ h. ראינו גם כי $\mathcal{L}$ לא תלוי מפורשות בזמן ולכן h קבוע. בנוסף חישבנו את השנוי באנרגיה וקיבלנו

$$\frac{dE}{dt} = mR^2\omega^2\dot{\theta}\sin 2\theta.$$

נרשום כעת את הלגרנג'יאן $\mathcal{L}'$ במערכת המסתובבת (מערכת המנוחה של החישוק):

$$\mathcal{L}' = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta.$$

נקבל (בדקו!) כי $E' = h'$ כאשר h' פונקציית יעקבי ו E' האנרגיה, ולכן

$$\frac{dh'}{dt} = \frac{dE'}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial t} = 0.$$

2. מטוטלת מתמטית במעלית (מסה m בקצה חוט באורך ℓ) הנעה במהירות $\vec{v} = v_0\hat{y}$.

קורדינטות מסת המטוטלת (ביחס לנקודת שווי המשקל במעלית) $x = \ell \sin\theta, \quad y = v_o t + (1-\cos\theta)\ell$, והלגראנג'יאן הוא

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - mgy = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2 + v_0^2 + 2v_0\ell\dot{\theta}\sin\theta) - mg(v_0 t + \ell - \ell\cos\theta).$$

פונקציית יעקבי היא

$$h = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + mg(v_0 t + \ell - \ell\cos\theta),$$

ואינה שווה לאנרגיה של המטוטלת. כמובן,

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = mgv_0.$$

הלגראנג'יאן במערכת המעלית (ביחס לתקרת המעלית) הוא כמובן

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta,$$

והוא נבדל מ $\mathcal{L}$ בנגזרת שלמה של פונקציה התלויה בקורדינטה ובזמן $f(\theta, t)$

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}' = mv_0\dot{\theta}\ell\sin\theta - mgv_0 t + \mathcal{L}_0 = \frac{df}{dt},$$

כאשר $\mathcal{L}_0$ קבוע, ו

$$f(\theta, t) = -mv_0\ell\cos\theta - \frac{1}{2}mgv_0 t^2 + \mathcal{L}_0 t.$$

גם במקרה זה מתקיים (בדקו!) $E' = h'$ ולכן

$$\frac{dh'}{dt} = \frac{dE'}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial t} = 0.$$