

# פיסיקה למתמטיקאים

## משפט נטר ופונקצית יעקבי

1. הכללה למשפט נטר אם  $\mathcal{L}$  אינוריאנטית תחת טרנספורמציות  $q_i \rightarrow q_i + \epsilon K_i$ , ובנוסף ניתן לרשום  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + df_\epsilon/dt$ , כאשר  $f_\epsilon(\vec{q}, \vec{q})$  פונקציה של הקורדינטות ונגזרותיהן, אזי

$$Q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} K_i + \left( \frac{df_\epsilon}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0}$$

גודל נשמר

דוגמה נתון הלגראנגיאן

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \beta xy$$

(א) הראו כי  $\mathcal{L}$  אינוריאנטי תחת סיבוב  $x \rightarrow x + \epsilon y, y \rightarrow y - \epsilon x$  וכי ניתן לרשום  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + df_\epsilon/dt$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \beta(x + \epsilon y)(\dot{y} - \epsilon \dot{x}) = \mathcal{L} + \beta\epsilon(y\dot{y} - x\dot{x}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \\ &= \mathcal{L} + \frac{d}{dt}\beta\epsilon(y^2 - x^2)/2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

(ב) מצאו גודל נשמר

$$Q = m\dot{x}y + (m\dot{y} + \beta x)(-x) + \beta(y^2 - x^2)/2 = m\dot{x}y - m\dot{y}x + \beta(y^2 - x^2)/2$$

2. חרוז בעל מסה  $m$  החפשי לנוע על חישוק עם רדיוס  $R$  המסתובב במהירות זוויתית  $\omega$  סביב ציר  $\hat{z}$ .

הלגראנגיאן של החרוז הוא

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2 \sin^2 \theta - mgR \cos \theta,$$

ופונקצית יעקבי היא

$$h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta,$$

ואילו האנרגיה היא

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta,$$

ושונה מ  $h$ . ברור כי  $\mathcal{L}$  לא תלוי מפורשות בזמן ולכן  $h$  קבוע. מאחר ופועל כח חיצוני המבצע עבודה ע"י סיבוב החישוק במהירות  $\omega$ , האנרגיה אינה קבועה והשינוי באנרגיה נתון ע"י

$$\frac{dE}{dt} = m R^2 \omega^2 \dot{\theta} \sin 2\theta.$$

3. חלקיק בעל מסה  $m$  נע במישור  $xy$  בהשפעת פוטנציאל הגרביטציה.

(א) רשמו את הלגראנג'יאן

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

(ב) רשמו את פונקציה יעקובי

$$h = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 - \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy$$

(ג) רשמו את האנרגיה והסיקו כי היא נשמרת

$$E = T + V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = h$$

ומאחר ו  $\mathcal{L}$  לא תלוי מפורשות בזמן מתקיים

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0.$$

(ד) כעת הניחו תנועה בהשפעת כח חיצוני  $F = -mg$  ורשמו את  $\mathcal{L}$ ,  $h$  ו  $E$ . הסבירו.

תאוצת הכובד היא  $-g$  ולכן (אם  $\dot{x}(0) \neq 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ ) נקבל  $\dot{y} = -gt$  ו  $y = -\frac{1}{2}gt^2$ .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mg^2t^2$$

ו

$$h = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mg^2t^2.$$

האנרגיה, לעומת זאת נתונה (מדוע?) ע"י

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

כלומר  $h \neq E$ .

הלגראנג'יאן שרשמנו מתאר מערכת שאינה מבודדת (פועל עליה כח חיצוני) ולכן פונקציית יעקבי אינה שווה לאנרגיה ואינה נשמרת. האנרגיה של המערכת  $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  כמובן נשמרת.