

# תרגול 2 - אינפי 4

14 במרץ 2016

תקציר

שדות וקטוריים ותבניות דיפרנציאליות לינאריות. תבניות סגורות ומדויקות. שדות משמרים. אינטגרל קווי מסוג שני.

## 1 שדות וקטוריים ותבניות דיפרנציאליות לינאריות

הגדרה 1. תהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . פונקציה מ  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  נקראת שדה וקטורי.

דוגמה 1. תהי  $\Gamma$  עקומה חלקה עם פרמטריזציה  $\gamma$ . לכל  $x = \gamma(t)$ , הקטור המשיק ל  $\gamma'(t)$  הוא שדה וקטורי.

דוגמה 2. תהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , ו  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה דיפרנציאלית. אזי  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) (a)$  הוא שדה וקטורי.  $\nabla f$  נקרא גרדיאנט.

דוגמה 3. יהי  $M = \{(x, y, z) : z = ax^2 + by^2 + c\}$ ,  $a, b > 0$  פרבולואיד. לכל נק' של  $p \in M$ , וקטור הנורמל  $n(p)$  למישור משיק ל  $M$  ב  $p$  כך שרכיב  $z$  שלילי הוא שדה וקטורי.

הגדרה 2. פונקציונל הוא פונקציה לינארית מ  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . אוסף כל הפונקציונלים יסומן ב  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  או  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

דוגמה 4.  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדר על ידי  $\phi(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$  הוא פונקציונל.

נזכר שהמרחב  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  נפרש על ידי הפונקציונלים  $\{f_i\}_{i=1}^n$  כאשר  $f_i$  פועל על הבסיס הסטנדרטי של  $\mathbb{R}^n$  באופן הבא:

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

באנליזה וקטורית (נושא של הקורס שלנו) מקובל לסמן את הפונקציונל  $f_i$  על ידי  $dx_i$ .

הגדרה 3. תהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . תבנית דיפרנציאלית לינארית היא פונקציה  $\phi : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . לעיתים נסמן  $\phi(x)$  או  $\phi_x$ . כלומר, לכל נק' אנו מתאימים פונקציונל.

כל תבנית לינארית ניתן לבטא באופן הבא:

$$\phi(x) = \phi_1(x) dx_1 + \dots + \phi_n(x) dx_n$$

הגדרה 4. תהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . תבנית  $\phi : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  נקראת רציפה אם לכל  $\phi_i(x)$ ,  $i$  באופן דומה, תבנית נקראת דיפרנציאלית, אם לכל  $i$ ,  $\phi_i(x)$  דיפרנציאלית. באופן יותר כללי נאמר שתבנית  $\phi \in C^n(U)$  אם כל נזרת חלקית מסדר  $n$  רציפה.

נזכר מאלגברה לינארית שכל פונקציונל  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  קיים וקטור יחיד  $w_\phi$  כך שלכל  $\phi \in \mathbb{R}^n$ , מתקיים  $\phi(v) = \langle v, w_\phi \rangle$ . זאת אומרת שלכל תבנית דיפרנציאלית מתאים שדה וקטורי. בעצם, קיימת התאמה חז"ע בין תבניות דיפרנציאליות לינאריות לבין שדות וקטוריים.

דוגמה 5. תהי  $f$  פונקציה דיפרנציאלית. אזי הדיפרנציאל של  $f$  בנקודה  $a$ ,  $df_a$  מתאים לוקטור הגרדיאנט באופן הבא:  $df_a(w) = \langle w, \nabla f(a) \rangle$

דוגמה 6. יהי  $F$  שדה וקטורי הפונקציונל  $\phi_f(x) = \langle v, F(x) \rangle$  הוא תבנית דיפרנציאלית.

הגדרה 5. יהי  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$  שדה וקטורי. נגדיר  $\operatorname{div} F$  להיות התבנית הבאה

$$\operatorname{div} F(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x)$$

הערה 1. לעיתים משתמשים בסימון  $\langle \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), (F_1(x), \dots, F_n(x)) \rangle$   $\cdot \langle \nabla, F \rangle$ .

תרגיל 1. חשב את הדיברגנטים של השדות הקוטוריים הבאים:

$$F = (x, y, z) \quad 1.$$

$$G = (xyz, e^x y^2 z, 1) \quad 2.$$

פתרון:

$$\operatorname{div} F = \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), (x, y, z) \right\rangle = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3 \quad 1.$$

$$\operatorname{div} G = \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), (xyz, e^x y^2 z, 1) \right\rangle = \frac{\partial (xyz)}{\partial x} + \frac{\partial (e^x y^2 z)}{\partial y} + 0 = yz + 2e^x yz \quad 2.$$

## 2 תבניות סגורות ומדויקות

הגדרה 6. תבנית לינארית  $f = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$  נקראת סגורה אם לכל  $i$  ו  $j$  מתקיים  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ .

הגדרה 7. תבנית לינארית  $\phi$  נקראת מדויקת אם קיימת פונקציה דיפרנציאלית  $\Phi$  כך ש  $\phi = d\Phi$ . (כאשר  $d\Phi$  מסמן את הדיפרנציאל של  $\Phi$ ).

כמו שהזכרנו קודם, קיימת התאמה בין תבניות לינאריות לשדות וקטוריים, נביא את ההגדרות המקבילות לשדות.

הגדרה 8. שדה וקטורי  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  נקרא משמר אם קיימת פונ' דיפרנציאלית  $\Phi$  כך ש  $\nabla \Phi = F$ . במקרה הזה, פונקציית  $\Phi$  נקראת פונקציית פוטנציאל.

משפט 1. יהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . אזי כל תבנית מדויקת  $\phi \in C^1(U)$  היא סגורה.

הכיוון השני לא בהכרח נכון. נתבונן בפונקציה אך המשפט הבא נותן תנאי מספיק שבו זה נכון.

הגדרה 9. נאָרמ ש  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  הוא תחום כוכבי, אם קיימת נקודה  $p \in U$  כך שלכל  $x \in U$  הקטע שמחבר בין  $p$  ו  $x$  מוכל כולו ב  $U$ .

משפט 2. (למת פואנקרה). יהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום כוכבי. אזי כל תבנית סגורה  $f : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  היא מדוייקת.

תרגיל 2. עבור כל אחת מהבתניות הבאות, קבע האם היא מדוייקת. במידה וכן מצא את פונקציית הפוטנציאל של השדה שמתאים לה.

$$1. \omega = (3x^2y^2 + 8xy^3) dx + (2x^3y + 12x^2y^2 + 4y) dy$$

$$2. \omega = (y^2 + 2xz) dx + (2xy + 3y^2z^3) dy + (2x^2z + 3y^3z^2) dz$$

פתרון:

(א) מכיוון ששתי הפונ' התבנית מוגדת בכל  $\mathbb{R}^2$ , לפי למת פואנקרה מספיק לבדוק שהיא סגורה. נבדוק האם מתקיים השוויון

$$\begin{aligned} \frac{\partial (3x^2y^2 + 8xy^3)}{\partial y} &= \frac{\partial (2x^3y + 12x^2y^2 + 4y)}{\partial x} \\ \frac{\partial (3x^2y^2 + 8xy^3)}{\partial y} &= 6x^2y + 24xy^2 \\ \frac{\partial (2x^3y + 12x^2y^2 + 4y)}{\partial x} &= 6x^2y + 24xy^2 \end{aligned}$$

ולכן התבנית מדוייקת. נמצא את פונקציית הפוטנציאל. במידה וקיימת חייב להתקיים

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2y^2 + 8xy^3 \\ \downarrow \\ f &= \int 3x^2y^2 + 8xy^3 dx \\ \downarrow \\ \int 3x^2y^2 + 8xy^3 &= x^3y^2 + 4x^2y^3 + C(y) \end{aligned}$$

$C(y)$  היא פונקצייה שתלוייה ב  $y$  בלבד ומתאפסת כאשר אנחנו גוזרים לפי  $x$ . כמו כן, חייב להתקיים

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 12x^2y^2 + C'(y) &= 2x^3y + 12x^2y^2 + 4y \\ \downarrow \\ C'(y) &= 4y \\ \downarrow \\ C(y) &= 2y^2 + C \\ \downarrow \\ f &= 2x^3y + 12x^2y^2 + 2y^2 + C \end{aligned}$$

נראה שקיימות תבניות סגורות שאינן מדוייקות.

### 3 אינטגרל קווי מסוג שני

ניתן קודם קצת מוטיבציה. נניח שאנחנו מפעילים כוח קבוע  $F$  (לכוח יש כיוון וגודל, לכן אפשר לחשוב עליו כוקטור) על גוף שנע על קו ישר קבוע מהנקודה  $X_1$  לנקודה  $X_2$ . נסמן  $\Delta X = X_2 - X_1$ . אזי העבודה שמבצע הכוח  $F$  מוגדר על ידי  $W = \langle F, \Delta X \rangle$ . יש חשיבות לכיוון של הכוח - למשל אנחנו מעוניינים להזיז ספר שמונח על השולח, ועל מנת לעשות זאת אנחנו דוחפים בשיא הכוח למעלה (במקום ימינה). במקרה הנ"ל הספר לא יזוז ימינה למרות שהפעלנו כוח גדול. העבודה שבצענו היא תהיה 0. אם המסלול שבו נע הגוף הוא לא ישר והכוח שפועל על הגוף אינו קבוע (אבל רציף) ננסה לקרב את העבודה שהכוח מבצע בעזרת קטעים קצרים וכוח קבוע. זו היא מוטיבציה להגדרה הבאה.

הערה 2. לעיתים נסמן  $f \cdot g$  במקום  $\langle f, g \rangle$ .

הגדרה 10. תהי  $\Gamma$  מסילה עם פרמטריזציה  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  שדה וקטורי. לכל חלוקה  $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$  וסדרה של נקודות  $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$  נגדיר את הסכום

$$S_\gamma(\mathcal{P}, x, F) = \sum_{k=0}^n \langle F(x_i) \mid \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle$$

אם קיים מספר  $I$  כך שלכל סדרה של חלוקות  $\mathcal{P}^{(k)}$  ובחירת נקודות  $\{x_i^{(k)}\}_{i=1}^{n_k}$  מתקיים

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(\mathcal{P}^{(k)}, x^{(k)}, F) = I$$

הוא נקרא אינטגרל קווי מסוג שני ומסמנים  $I = \int_\Gamma F \cdot d\gamma$  או  $I = \int_\gamma F_1(x) dx_1 + \dots + F_n(x) dx_n$  (כאשר  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ ).

הערה 3. האינטגרל תלוי בכיוון שבו אנחנו הולכים על המסילה, באוריינטציה ורק באוריינטציה. ניקח את אותה המסילה ונילך בכיוון ההפוך נקבל אותו אינטגרל עם סימן הנגדי. זה נובע מההגדרה של האינטגרל.

הערה 4. נשים לב שאם נסמן  $\phi = F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$  בעצם בצד אחד מדובר בתבנית ובצד שני פונ' וקטורית. על האינטגרל אפשר לחשוב בעצם בשתי צורות. או שאנחנו מציבים את  $\Delta\gamma_i$  בתבנית הדיפרנציאלית בנקודה  $\gamma(x_i)$  או שאנחנו מכפילים את  $F$  בקודה  $\gamma(x_i)$  בוקטור  $\Delta\gamma_i$ .

משפט 3. תהי  $\Gamma$  מסילה חלקה עם פרמטריזציה  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  אזי

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F \cdot d\gamma &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b (F_1(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + \dots + F_n(\gamma(t)) \gamma'_n(t)) dt. \end{aligned}$$

הערה 5. אם  $\alpha$  ו  $\beta$  הן עקומות שקולות, אזי

$$\int_\alpha F = \int_\beta F$$

תרגיל 3. תהא  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^n$  המוגדרת על ידי

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)$$

ושדה המוגדר על ידי

$$F(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$$

חשב את  $\int_\gamma F$ .

פתרון: מתקיים

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, \cos t - \sin t)$$

כלומר, העקומה חלקה ולכן מקבלים

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_0^{2\pi} \langle (\cos t, \cos t + \sin t, 2\cos t + 2\sin t), (-\sin t, \cos t, \cos t - \sin t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t - \cos t \sin t - \sin^2 t + \cos t \sin t + 2\cos^2 t - 2\sin^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2\cos^2 t - 3\sin^2 t) dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \cos 2t dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \\ &\downarrow \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ &\downarrow \\ \sin^2 t &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \\ &\downarrow \\ - \int_0^{2\pi} \sin^2 t &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos 2t - 1) dt \\ &= -\pi. \end{aligned}$$

המשפט נשאר נכון, גם אם מחליפים מסילה חלקה במסילה חלקה למקוטעין.

תרגיל 4. חשב את האינטגרל הקווי

$$\int_{\Gamma} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

כאשר  $\Gamma$  הוא השפה של המלבן בעל הקודקודים  $A = (2, 2), B = (-1, 2), C = (-1, -3), D = (2, -3)$  עם הכיוון  $ABCD$ .

פתרון: נסמן

$$\phi(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

מתקיים:

$$\int_{\Gamma} \phi = \int_{AB} \phi + \int_{BC} \phi + \int_{CD} \phi + \int_{DA} \phi$$

לפי האדיטיביות של האינטגרל. נחשב כל אחד מהאם. נשים לב ש

$$\int_{AB} \phi = - \int_{BA} \phi$$

נבחר את הפרמטריזציה הבאה ל  $BA$ .

$$\begin{aligned} \gamma : [-1, 3] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma(t) &= (t, 2) \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
 \int_{BA} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy &= \int_{-1}^2 -\frac{2dt}{t^2+4} \\
 &= -2 \int_{-1}^2 \frac{dt}{t^2+4} \\
 &= -2 \int_{-1}^2 \frac{1}{4 \frac{t^2}{4} + 1} dt \\
 &= -2 \int_{-1}^2 \frac{1}{4 \left(\frac{t}{2}\right)^2 + 1} dt \\
 &= \arctan \left(\frac{t}{2}\right) \Big|_{-1}^2 \\
 &= -\left(\arctan \left(\frac{2}{2}\right) - \arctan \left(\frac{-1}{2}\right)\right) \\
 &= -\left(\arctan(1) + \arctan \left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
 &\Downarrow \\
 \int_{AB} \phi &= \arctan(1) + \arctan \left(\frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

נעבור לחשב את  $\int_{BC} \phi$ . שוב, כמו קודם, מתקיים

$$\int_{BC} \phi = \int_{CB} \phi$$

נבחר את הפרמטריזציה הבאה ל- $CB$ .  $\gamma: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  המוגדרת על ידי  $\gamma(t) = (-1, t)$ . נקבל:

$$\begin{aligned}
 \int_{CB} \phi &= \int_{-3}^2 \phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \int_{-3}^2 \left\langle \left(\frac{-t}{1+t^2}, -\frac{1}{1+t^2}\right), (0, 1) \right\rangle dt \\
 &= -\int_{-3}^2 \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= -\arctan(t) \Big|_{-3}^2 = -(\arctan 2 + \arctan 3) \\
 &\Downarrow \\
 \int_{BC} \phi &= \arctan 2 + \arctan 3
 \end{aligned}$$

נחשב את  $\int_{CD} \phi$ . נבחר פרמטריזציה  $\gamma(t) = (t, -3)$  כאשר  $t \in [-1, 2]$ . נקבל

$$\begin{aligned} \int_{CD} \phi &= \int_{-1}^2 \phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{-1}^2 \frac{3dt}{t^2 + 9} \\ &= \int_{-1}^2 \frac{1}{3} \frac{dt}{\left(\frac{t}{3}\right)^2 + 1} \\ &= \arctan\left(\frac{t}{3}\right) \Big|_{-1}^2 \\ &= \arctan\left(\frac{2}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

באופן דומה: נבחר פרמטריזציה ל  $DA$ .  $\gamma(t) = (2, t)$  עבור  $t \in [-3, 2]$ . האינטגרל הופך ל

$$\begin{aligned} \int_{DA} \phi &= \int_{-3}^2 \phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{-3}^2 \frac{dt}{4 + t^2} \\ &= 2 \arctan\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_{-3}^2 = \arctan 1 + \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

נחבר את האינטגרלים ונקבל:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \phi &= \int_{AB} \phi + \int_{BC} \phi + \int_{CD} \phi + \int_{DA} \phi \\ &= \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan 2 + \arctan 3 \\ &+ \left(\frac{2}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan 1 + \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

נשתמש בזהות טריגונומטרית  $\arctan(\alpha) + \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2}$  ונקבל

$$\int_{\Gamma} \phi = 2\pi$$

משפט ניוטון לייבניץ נכון במובן מסויים גם עבור אינטגרל מסוג שני. נוכיח את הגרסא החלשה שלו.

תרגיל 5. תהי  $\phi$  תבנית מדוייקת ורציפה ו  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  עקומה חלקה. תהי  $f$  כך ש  $df = \phi$  עקומה חלקה. אזי

$$\int_{\gamma} \phi = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

פתרון: נגדיר  $g = f \circ \gamma$ . לפי כלל שרשרת

$$g'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \phi &= \int_a^b \phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_a^b g'(t) dt \\
&\stackrel{\text{Newton-Leibnitz}}{=} g(b) - g(a) \\
&= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))
\end{aligned}$$

בעזרת התרגיל האחרון, נראה שקיימות תבניות סגורות אך שאינן מדוייקות, כפי השבטחנו. ראשית, מהתרגיל נובע: אם  $\phi$  תבניות מבדוייקת ו  $\gamma$  עקומה חלקה וסגורה, אזי

$$\int_{\gamma} \phi = 0.$$

תרגיל 6. הראה שהתבנית

$$\phi(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

סגורה אך אינה מדוייקת.

פתרון: אפשר לוודא בקלות שהתבנית, סגורה על ידי גזירה. ננסה לחשב את  $\int_{\gamma} \phi$  כאשר  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  (נקבל  $t \in [0, 2\pi]$ )

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \phi &= \int_0^{2\pi} \phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \langle (\sin t, -\cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi \neq 0
\end{aligned}$$

ולכן התבנית אינה מדוייקת.