<u>אזהרה:</u> מכפלה קרטזית של קבוצות פתוחות לא תמיד פתוחה

$\left(\frac{1}{2},3\right)^{\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2},3\right) \times \left(\frac{1}{2},3\right) \times \ldots$ **לא פתוחה** ב - $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$(a,b)^{\mathbb{N}}$ <u>לא פתוחה</u> ב – $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

<u>הסבר:</u> $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$

כאן $I = \mathbb{N}$ $\quad (X_n, \tau_n) = \mathbb{R}$

אם נניח בשלילה ש - $(a,b)^{\mathbb{N}}$ פתוח, אז – $(a,b)^{\mathbb{N}} \in \tau_\pi = \gamma^\cup$. לכן

$\Leftarrow (a,b)^{\mathbb{N}}$ מכיל תיבה בסיסית לא ריקה.

לכן הוא מכיל $\ldots \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times O_m \times \ldots \times O_2 \times O_1 \supseteq \ldots \times (a,b) \times (a,b)$.

אבל זה גורר $\mathbb{R} \subseteq (a,b)$, סתירה!

<u>טענה שימושית</u>: במכפלה סופית אם γ_i בסיס ל τ_i אז $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$ בסיס ל $\tau_{\prod}$.

עבור מכפלה אינסופית: $\left\{ \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(O_j) \,\middle|\, J \subseteq I \text{ סופי}, O_j \in \gamma_j \right\}$

שאלה חשובה: מתי תכונה נשמרות ע"י מכפלה טופולוגית (סופית, אינסופית) ?

- (תמיד ללא הגבלת מספר הגורמים)

$T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3.5}$, קשירות, קשירות מסילתית, קומפקטיות (משפט *Tychonoff*) ...

- (מכפלות סופיות ובנות מניה)

  $\cdots, Sep, B_1, B_2, Metriz, \cdots$

- (מכפלות סופיות)

$discr, \quad LComp$ (קומפקטיות מקומית)

<u>הגדרה:</u> מ"ט X הוא **קומפקטי מקומית** אם לכל נקודה יש סביבה קומפקטית.
שקול: לכל נקודה יש סביבה שהסגור שלה קומפקטי. נסמן: $X \in LComp$.

דוגמאות: מרחב דיסקרטי, $\mathbb{R}^n$, כל תת קבוצה פתוחה במרחב קומפקטי T_2 ...

תרגיל: $\mathbb{Q} \notin LComp$.

הערה: "קומפקטיות מקומית" לא נשמרת ע"י מכפלה <u>אינסופית</u> (סופית – כן!).

תרגיל: $\mathbb{R}^n \in LComp$ אבל $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \notin LComp$.

הסבר: כל סביבה $V \in N(x)$ של כל נקודה $x = (x_1, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ מכילה תיבה בסיסית $U := U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ ב $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

לכן הטלה $p_{m+1}(V) = p_{m+1}(\mathrm{U}) = \mathbb{R}$ עם תמונה רציפה $\mathbb{R}$ (שהיא לא קומפקטית) ...

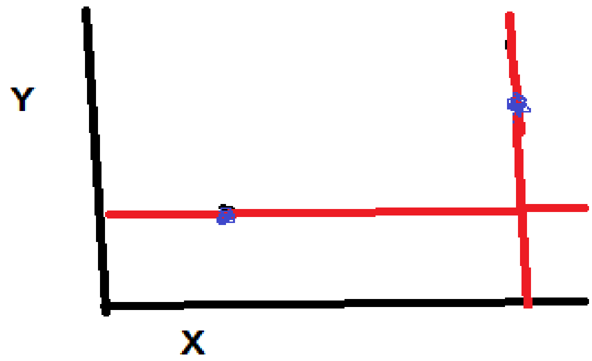
הערה: דיסקרטיות לא נשמרת ע"י מכפלה אינסופית בת מנייה.

למשל $\mathrm{C} \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \notin discr$ הומיאומורפי לקבוצת קנטור.

<u>תרגיל:</u> א. $\{x\} \times Y \simeq Y \quad X \times \{y\} \simeq X$.

ב. הוכיחו $X, Y \in Conn \Leftrightarrow X \times Y \in Conn$.

רמז: כדאי להיעזר ב (א) ובמשפט האלומות (השירשור).



הערה: מכפלה סופית שומרת על מטריזביליות (נכון גם למכפלה בת מניה).

$$(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2) \in Metr$$

$$\to \left(X_1, \underbrace{top(\rho_1)}_{\tau_1}\right), \left(X_2, \underbrace{top(\rho_2)}_{\tau_2}\right) \in TOP$$

<u>טענה:</u> יש התאמה עם הגדרת טופולוגית τ_π - "מטריקת מכפלה".

א) "מטריקה בסגנון אוקלידס" –

$$d(x, y) := \sqrt{\rho_1(x_1, y_1)^2 + \rho_2(x_2, y_2)^2}$$

ב) $d_1(x,y) := \rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2)$

ג) $d_{max}(x,y) := \max\{\rho_1(x_1,y_1), \rho_2(x_2,y_2)\}$

- <u>תרגיל:</u>

א) $d\sim d_1\sim d_{max}$ מ - $X := X_1 \times X_2$.

ב) $\underbrace{top(d) = top(d_1) = top(d_{max})}_{(\text{א}) \Rightarrow} = \underbrace{\tau_\pi}_{\text{טופולוגית מכפלה}}$

<u>מטריזציה במקרה של מכפלה בן מנייה:</u>

$$X = \prod_{i\in\mathbb{N}} (X_i, \rho_i) = X_1 \times X_2 \times \cdots$$

$d(x,y) := \sup\{\frac{1}{2^i}\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)} \mid i\in\mathbb{N}\}$ אחת מהאפשרויות.

- <u>תרגיל:</u> לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} Y$ מתקיים ש

$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x,f(x)) | x\in X\}}_{\text{תת מרחב טופלוגי}} \subset X\times Y$.

רמז: כדאי להשתמש בפונקצית ההטלה.

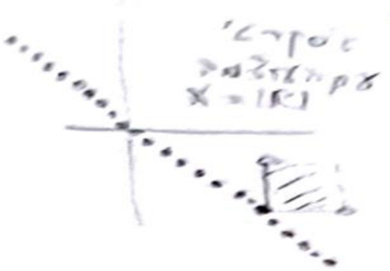
- <u>תרגיל:</u> הוכיחו $X\in T_2 \Leftrightarrow \Delta_X := \{(x,x) \mid x\in X\}$ סגור ב $X\times X$.
- <u>תרגיל:</u>* הוכיחו שאם $f: X\to Y$ רציפה ו $Y\in T_2$ אז $Gr(f)$ סגור ב $X\times Y$

שאלה: האם יש קשר בין שני התרגילים הקודמים ?

- תרגיל:* הוכיחו: $cl(\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} cl(A_i)$ לכל $A_i \subseteq (X_i,\tau_i)$.
- <u>תרגיל:</u> * "מישור סורגנפראי" $(\mathbb{R},\tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי.

רמז: $\{[a, a+\varepsilon)\times[b, b+\delta) : a,b\in\mathbb{R}, \varepsilon>0, \delta>0\}$

בסיס למישור סורגנפראי ....



הגדרה: נניח $(G,\cdot)$ חבורה ו - (G,τ) מ"ט.

אומרים ש - $(G,\cdot,\tau) \in TGr$ חבורה טופולוגית $(Topological\ Group)$ אם מתקיים:

א. "כפל" $a \cdot b \mapsto (a,b)$ $G \times G \xrightarrow{\cdot} G$ פונקציה רציפה.

שקול: $\forall a,\mathrm{b} \in G\ \forall U \in N(ab)\ \exists V_1 \in \mathrm{N}(a), V_2 \in N(\mathrm{b}) \quad V_1 V_2 \subseteq U$

ב. "ההיפוך": $a \mapsto a^{-1}$ $G \to G$ פונקציה רציפה.

שקול: $\forall a \in G\ \forall U \in N(a) \quad U^{-1} \in N(a^{-1})$

<u>תרגיל</u>: לנסח בעזרת סדרות מתכנסות אם G מטריזבילי (או B_1).

דוגמאות:

- כל מרחב נורמי $(E,\|\cdot\|)$ מגדיר חבורה טופולוגית $(E,+,\tau_{\|\cdot\|})$
- $(\mathbb{Z},+,\tau_p)$
- כל חבורה בטופולוגיה דיסקרטית

הערה: בהגדרת של TGr - (א) $\not\Leftarrow$ (ב).

למשל $(\mathbb{R},+,\tau_s)$ בטופולוגית סורגנפראי.

<u>תזכורת</u>: $\mathbb{R} \supseteq O \in \tau_s \overset{def}{=} \forall\, x \in O\ \exists \epsilon > 0 : [x, x+\epsilon) \subseteq O$

למשל – $[0,1) \ni \tau_s$ פתוחה אבל לא $(-1,0]$ (שהוא מקור של $[0,1)$).

הסבר נוסף: $\lim \frac{1}{n} = 0\ but\ \lim(-\frac{1}{n}) \neq 0$.

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שכל חבורה טופולוגית היא הומוגנית.

לסקרנים:

- (על חבורות טופולוגיות)

באתר http://u.math.biu.ac.il/~megereli/seminar.html ראו קבצים :

http://u.math.biu.ac.il/~megereli/IntroTopGr.pdf

http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TGrNotes070217.pdf

http://u.math.biu.ac.il/~megereli/TGrEx.pdf

- (על מכפלה טופולוגית) https://en.wikipedia.org/wiki/Product_topology

<u>קומפקטיות</u> "הכללה גאונית של סופיות"

<u>**(תזכורת):**</u> מרחב טופולוגי הוא **קומפקטי** אם לכל כיסוי פתוח שלו יש תת כיסוי סופי.

<u>**תכונות ודוגמאות:**</u>

- כל מרחב <u>סופי</u> הוא קומפקטי.
- $Comp \ni \left(X, \tau_{cofinite}\right)$

<u>*הסבר:*</u> קבוצה קוסופית היא מכסה כמעט הכל פרט אולי למספר סופי של נקודות.

- $X \ is \ \ finite \Leftrightarrow (X, \tau_{discr}) \in \text{Comp}$

<u>*הסבר:*</u> $\{\{x\} : x \in X\}$ כיסוי פתוח של X.

- <u>**הגדרה:**</u> תת קבוצה Y במרחב X נקראת **קומפקטית** אם $(\text{Y}, \tau_Y) \in \text{Comp}$.

<u>**משפט (קריטריון לתת קבוצה קומפקטית):**</u> התנאים הבאים שקולים:

א) Y תת קבוצה קומפקטית ב – X.

ב) לכל אוסף $\alpha = \{O_i\}_{i \in I}$ של קבוצות פתוחות ב – X שמכסה את Y

(ז"א $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$) קיים תת אוסף <u>סופי</u> $\{O_j\}_{j \in J}$, $J \subseteq I$ סופי שמכסה את Y

(ז"א $Y \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$).

<u>הסבר:</u> נובע מהגדרת תת מרחב טופולוגי.

- איחוד סופי תת קבוצות קומפקטיות גם קומפקטי.

<u>**תרגיל**</u>: תת קבוצות $Q \cap [0,1]$ $Q,$ לא קומפקטיות. (רמז: משפט Heine-Borel)

<u>**תרגיל**</u>: $Y = [0,1]$ בקו סורגנפראי $(\mathbb{R}, \tau_s)$ לא קומפקטי.

פתרון: נקודון $\{1\}$ מבודד ב Y. כיסוי $\alpha := \bigcup_{n \geq 2} [0, \frac{n-1}{n}) \cup \{1\}$ כיסוי פתוח ("בעייתי") של Y ללא תת כיסוי סופי.

- **משפט:** אם (X,d) מ"מ קומפקטי (ז"א $Comp \ni \left(X, top(d)\right)$) אזי

א. (X,d) חסום כליל (ולכן גם חסום).

ב. $X \in Sep$

ג. $X \in B_2$

ד. העוצמה של X היא לכל היותר עוצמה של ממשיים.

הוכחה: א **תזכורת:** לכל ε-כיסוי $\{B(x,\varepsilon): x \in X\}$ יש תת כיסוי סופי.

ב. כל חסום כליל הוא ספרבילי

(כי אם A_ε סופי ו- ε-צפוף ב (X,d) אז $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}$ בת מניה וצפופה ב X).

ג. במרחבים מטריזביליים ספרביליות ו B_2 שקולות.

ד. **טענת**: כל מרחב מטריזבילי וספרבילי בעל עוצמה לכל היותר עוצמה של ממשיים.

ניקח תת קבוצה צפופה (ז"א $cl(A) = X$) בת מניה A ב X. בגלל המטריזביליות $\mathrm{scl(A)} = \mathrm{cl(A)}$. לכן נקבל $\mathrm{scl(A)} = X$.

לכל איבר $x \in X$ נבחר בסדרה אחת $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש $a_n \in A, x = \lim a_n$. נגדיר פונקציה

$$\sigma : \mathrm{X} \to \mathrm{P(A)} \quad \sigma(x) = \{a_n \mid \mathrm{n} \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{A}$$

זאת פונקציה **חח"ע**. לכן $card\,\mathbb{R} = 2^{\aleph_0} \geq card\ P(\mathrm{A}) \geq \mathrm{card}(\sigma(\mathrm{X})) = card(X)$.

■

הערה: אפשר להוכיח את החסימות ישר כך:

ניקח $z \in X$, אז – $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n(z)$

כיסוי פתוח. יש תת כיסוי <u>סופי</u> ואז – $\exists n_0 : X = B_{n_0}(z)$ לכן

$$diam\, X \leq 2n_0$$

- **הערה:** קומפקטיות לא תורשתית – $\underbrace{(0,1)}_{\notin Comp} \subset \underbrace{[0,1]}_{\in Comp}$

($\alpha := \{(\frac{1}{n},1) : n \in \mathbb{N}\}$ כיסוי פתוח "בעייתי" של $(0,1)$)

אבל יש תורשתיות קומפקטיות לגבי תת קבוצות <u>סגורות</u>.

משפט: נניח $X \in Comp$, $Y \subseteq X$ תת קבוצה <u>סגורה</u>. אז גם $Y \in Comp$.

<u>הוכחה:</u>

נניח $\alpha = \{O_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות פתוחות ב – X כך ש – $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$

<u>הרעיון:</u> להוסיף Y^c (קבוצה פתוחה) לאוסף α ואז מתקבל אוסף חדש $\alpha^* = \alpha \cup \{Y^c\}$.
הוא בעצם <u>כיסוי פתוח</u> של X.

$X \in Comp$ ⇐ קיים תת כיסוי <u>סופי</u> $\gamma \subseteq \alpha^*$. Y^c לא משתתף בכיסוי של Y לכן אם מורידים Y^c מ – γ (בתנאי שהוא נמצא שם) אז עדיין נקבל כיסוי של Y. לכן נקבל תת אוסף סופי ל – α (ולא ל - α^*) שמכסה את Y. אז $Y \in Comp$ עפ"י קריטריון לתת קבוצות.

■

<u>משפט:</u> תמונה רציפה שומרת על $Comp$.

<u>הוכחה:</u> $X \in Comp$. f רציפה ועל $f(X) = Y$. צ"ל $Y \in Comp$.

נניח $\alpha = \{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של Y. צ"ל – קיים כיסוי <u>סופי</u>.

$Y = \bigcup_{i\in I} O_i$ ⇐

$X = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} O_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)$.

$\{f^{-1}(O_i)\}_{i\in I}$ כיסוי <u>פתוח</u> של X ($f^{-1}(O_i)$ פתוח בגלל ש – f רציפה).

$X \in Comp$ ⇐ קיים תת כיסוי סופי ל - $\{f^{-1}(O_i)\}_{i\in I}$, ז"א קיים $J \subseteq I$ סופי כך ש –

$$X = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(O_j)$$

אז מכאן – $Y = f(X) = f\left(\bigcup_{j\in J} f^{-1}(O_j)\right) = \bigcup_{j\in J} f(f^{-1}(O_j)) = \bigcup_{j\in J} O_j$

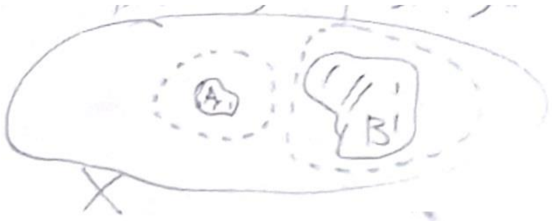
(תמיד $ff^{-1}(A) \subseteq A$ אבל אם f על אז $ff^{-1}(A) = A$)

מצאנו תת כיסוי סופי $\{O_j\}_{j\in J}$ ל – α.

■

<u>תרגיל:</u> נניח $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו $f([a,b]) = [c,d]$.

משפט (ההפרדה): נניח $X \in T_2$, A, B תת קבוצות קומפקטיות וזרות. אזי קיימת סביבות (פתוחות) זרות.



הוכחה:

מקרה א' – $A = \{a\}$

הערה: קל להוכיח בהנחה נוספת אם B סופית (חיתוך סופי).

הרעיון הוא להפעיל את הקומפקטיות של B ...

$$X \in T_2 \Rightarrow \boxed{\forall b \in B\ \exists U_b \in N(a)\ \exists V_b \in N(b): U_b \cap V_b = \emptyset}$$

U_b ו - V_b סביבות פתוחות.

$\alpha = \{V_b\}_{b \in B}$ כיסוי פתוח של תת קבוצה B במרחב X.

בגלל קריטריון (3) $\Leftarrow$ קיים תת כיסוי סופי –

$$\exists \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq B: B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i} \underbrace{=:}_{\text{נסמן}} V \in N(B)$$

V סביבה פתוחה של B. נגדיר בהתאמה –

$$N(a) \ni U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}$$

מ - (t_2) נקבל שזוהי סביבה פתוחה של a. כעת, לכל $i \in \{1, \dots, n\}$ –

$$U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}\right) = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$U \cap V = \emptyset$$

הוכחנו את מקרה א'.

<u>מקרה ב' (כללי)</u> –

בעזרת שלב א':

$$\forall a \in A\ \exists U_a \in N(a)\ \exists V_a \in N(B): U_a \cap V_a = \emptyset$$

כאשר U_a, V_a סביבות פתוחות. $\alpha = \{U_a\}_{a \in A}$ כיסוי פתוח של A במרחב X.

$$X \supseteq A \in Comp$$

לכן שוב לפי הקריטריון יש תת כיסוי סופי

$$\exists \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A: N(A) \ni U \coloneqq \bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i} \supseteq A$$

נגדיר – $N(B) \ni V \coloneqq \bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i} \supseteq B$ V פתוח בגלל - (t_2).

$$U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i}\right) = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$U \cap V = \emptyset$$

■

- **<u>משפט (הסגירות):</u>** נניח $X \in T_2$, $Y \subset X$ תת קבוצה קומפקטית. אזי Y סגורה ב – X.

<u>הוכחה:</u>

ניקח $a \notin Y$ (בה"כ קיימת!).

צ"ל – $a \notin \bar{Y}$.

לפי משפט ההפרדה, קיימות סביבות פתוחות וזרות $U \in N(a), V \in N(Y)$ כך ש

$$U \cap V = \emptyset$$

$$U \cap Y = \emptyset$$

ולכן $a \notin \bar{Y}$ ולכן Y סגור.

■

משפט (הנורמליות):

$$X \in T_4 \Leftarrow \begin{cases} X \in T_2 \\ X \in Comp \end{cases}$$

הוכחה: A, B תת קבוצות סגורות וזרות. $A, B \in Comp$

(כתת קבוצה סגורה בקומפקטי). אז לפי משפט ההפרדה קיימות סביבות זרות.

■

משפט: נניח $X \in Comp$, $Y \in T_2$, $f: X \to Y$ רציפה. אזי f פונקציה **סגורה**.

הוכחה:

צ"ל $f(A)$ סגורה ב – Y לכל A סגורה ב – X.

$$\underbrace{A}_{\text{סגור}} \subseteq X \in Comp$$

אז לפי משפט שהוכחנו $A \in Comp$.

לפי משפט – תמונה רציפה שומרת על $Comp$. נקבל (מהתורשתיות של רציפות גם) –

$$T_2 \ni Y \supseteq f(A) \in Comp$$

$f(A)$ סגור לפי משפט שהוכחנו (סגירות של פונקציה ...).

■

משפט (הכללת משפט ויירשטראס): נניח $X \in Comp$, $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי f חסומה ומקבלת Max, Min מוחלטים.

הוכחה:

$Comp$ נשמרת ע"י תמונה רציפה. לכן – $\mathbb{R} \supset f(X) \in Comp$

$f(X)$ תת מרחב מטרי ב - $\mathbb{R}$, אז $f(X)$ חסומה!

$$\mathbb{R} \ni B := \sup\{f(x) | x \in X\} \in \overline{f(X)}$$

$$\mathbb{R} \ni A := \inf\{f(x) | x \in X\} \in \overline{f(X)}$$

מצד שני, $f(X)$ סגור בגלל משפט הסגירות (כלומר $f(X) = \overline{f(X)}$) ולכן מתקבלים

$$B = Max\ f$$

$$A = Min\ f$$

■

<u>תרגילים:</u>

1) נניח (X,d) מ"מ, $A,K\subseteq X$ לא ריקות, $K\in Comp$. אזי:

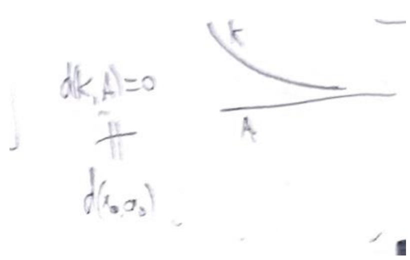
א) קיימת נקודה $x_0\in K$ כך ש – $\boxed{d(K,A)=d(x_0,A)}$

<u>רמז:</u> פונקציית המרחק...

ב) אם גם $A\in Comp$, אז – $\exists a_0\in A,\exists x_0\in K\colon \boxed{d(K,A)=d(x_0,a_0)}$

<u>דוגמה נגדית</u> (אפילו לקבוצות סגורות):

ב - $\mathbb{R}^2$:



ב - $\mathbb{R}$: $\underbrace{B=\left\{n+\frac{1}{2n}\middle|n\in\mathbb{N}\right\},A=\mathbb{N}}_{\text{סגורות}}$

$0=d(A,B)\neq d(a_0,b_0)$ (לכן inf לא מתקבל!)

<u>משפט (על השיכון והומיאומורפיזם):</u> נניח $X\in Comp$, $Y\in T_2$, $f\colon X\to Y$ רציפה <u>וחח"ע</u>. אזי f <u>שיכון טופולוגי</u> (ז"א $f\colon X\to f(X)$ הומיאומורפיזם).

<u>הערה:</u> א. במקרה הפרטי, אם בנוסף f <u>על</u> אז נקבל הומיאומורפיזם.

ב. קומפקטיות של X חשובה מאוד. ראינו דוגמאות...

<u>הוכחה:</u> מ"ל את המשפט בהנחה ש – f <u>על</u>. ואז צ"ל f הומיאומורפיזם.

תנאים (1) ו – (2) בהגדרת הומיאומורפיזם מתקיימים עפ"י הנתון (ישר).

3) רציפות של ההופכי – $X\xleftarrow{f^{-1}}Y=f(X)$

לפי קריטריון 3 על רציפות, מספיק להראות ש – f פונקציה סגורה. כאן נשתמש במשפט הקודם.

■

הגדרה: נניח $\alpha = \{A_i\}_{i\in I}$ אוסף תת קבוצות בקבוצה X. אומרים:

א) $\boldsymbol{\alpha \in FIP}$ תכונת החיתוך הסופי, אם – $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset$ לכל $J \subseteq I$ **סופית**.

ב) $\boldsymbol{\alpha \in IP}$ אם $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

(ברור ב $\Leftarrow$ א).

דוגמה: כל סדרה $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ יורדת $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ של קבוצות לא ריקות היא FIP

למשל: $A_n := \{n, n+1, n+2, \dots\}, n \in \mathbb{N}$

$$\alpha = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in FIP \backslash IP$$

תוצאה: נניח $(X,\tau) \in \text{Comp}$ ו σ טופולוגיה על X עם תכונת T_2 (*Hausdorff*) כך ש $\sigma \subseteq \tau$. אז $\sigma = \tau$.

משפט (קריטריון *FIP* של *Comp*): נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Comp$.

2) מתקיים – $\begin{cases} FIP \ni \alpha = \{A_i\}_{i\in I} \\ \forall i \in I: \text{סגורה } A_i \end{cases} \Rightarrow IP \ni \alpha$

הוכחה:

שימו לב ש - $\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X אם ורק אם האוסף של המשלימים $\{O_i^c\}_{i\in J}$ (קבוצות סגורות) הוא לא IP.

$$\bigcup O_i = X \Rightarrow \bigcap O_i^c = \emptyset$$

(כללי *de Morgan* והגדרת *Comp*).

■

דוגמה: $\mathbb{R} \notin Comp$ (דרך *FIP*).

$A_n := [n, \infty), n \in \mathbb{N}$ סגורות -ו $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$

$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in FIP \backslash IP$$

דוגמה: $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \notin \text{Comp}$

$A_k = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, k \leq n\}$ סגור $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$.

<u>משפט:</u> כל מרחב מטרי (X,d) קומפקטי הוא מ"מ שלם.

<u>הסבר נוסף:</u> דרך

<u>קריטריון $Cantor$ לשלמות מאינפי:</u>

התנאים הבאים שקולים:

א) (X,d) מ"מ <u>שלם</u>.

ב) לכל סדרה יורדת $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$

של קבוצות <u>סגורות</u> כך ש – $diam(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ מתקיים –

$$\{c\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$$

<u>הוכחה למשפט השלמות:</u>

$\alpha = \{A_n\} \in FIP$

A_n סגור. לכן בגלל הקומפקטיות אכן $\bigcap_{n\in I} A_n \neq \emptyset$.

$\Downarrow$

$\alpha \in IP$

ואז מקריטריון קנטור נקבל המרחב הוא שלם.

■

<u>משפט ($Heine - Borel$):</u>

נניח $X \subseteq \mathbb{R}^n$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Comp$.

2) X חסום וסגור.

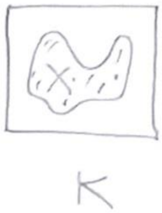
<u>הוכחה:</u>

<u>(1) $\Leftarrow$ (2):</u>

<u>חסימות</u> – כל מ"מ קומפקטי הוא חסום (הוכחנו: ה"כ)

<u>סגירות</u> – $\mathbb{R}^n \in T_2$. נפעיל את משפט הסגירות.

<u>$(2) \Rightarrow (1)$:</u>



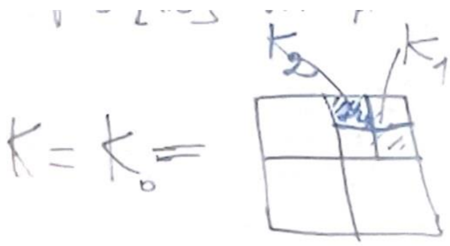
קיימת קובייה $K \subset \mathbb{R}^n$ כך ש – $X \subseteq K$

<u>דרך א':</u>

$$K = [a,b]^n$$

אז לפי $Tychonoff$, אכן $K \in Comp$ (אם ידוע ש - $[a,b] \in Comp$).

<u>דרך ב' ($Cantor$):</u>



נניח בשלילה ש - $K \notin Comp$.

ז"א יש כיסוי פתוח ללא תת כיסוי סופי. נחלק תתי קוביות (מספר $= 2^n$) דרך החלוקה של הצלעות. נקרא לתת קובייה – "קובייה בעייתית" אם אין תת כיסוי סופי עבור הכיסוי הנ"ל. אז יש לפחות תת קובייה אחת בעייתית K_1.

באופן דומה כמו קודם, נחלק לתתי קוביות ואז יש תת קובייה $K_2 \subset K_1$ כך ש - K_2 בעייתית.

אז נקבל – $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$

סדרה יורדת של קוביות (סגורות לא ריקות).

$$diam(K_n) \leq \frac{b-a}{2^n} \to 0$$

$\mathbb{R}^n$ שלם, לכן לפי קריטריון קנטור: יש איבר משותף $\{c\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$

$c \in K$. לכן קיים איבר מסוים של הכיסוי $O_i \in \alpha$ כך ש – $c \in O_i$

בגלל הפתיחות $\exists r > 0: B_r(c) \subset O_i$

לכן – $\exists m \in \mathbb{N}: c \in K_m \subset B_r(c) \subset O_i$

קיבלנו ש - K_m מכוסה ע"י איבר אחד O_i של הכיסוי. לכן K_m לא בעייתית בסתירה לבנייה!

■

הערה:

משפט $Heine-Borel$ בד"כ לא נכון אם מחליפים $\mathbb{R}^n$ במרחבים מטריים או נורמיים אחרים.

דוגמה: (כבר דיברנו על זה)

במרחב הילברט l_2 יש תת קבוצה חסומה וסגורה לא קומפקטית.

למשל: $A := \{e_1, e_2, \dots\} \subset l_2$ (דיסקרטי אינסופי לכן לא קומפקטי).

לסקרנים (על הקומפקטיות):

https://en.wikipedia.org/wiki/Compact_space

https://arxiv.org/pdf/1006.4131v1.pdf

משפט (קומפקטיות במרחב מטרי): נניח (X,d) מ"מ. התנאים הבאים שקולים:

1) $X = (X, top(d)) \in Comp$.

2) $X \in SComp$ (לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת).

3) $X \in BW$ (תכונת $Bolzano-Weierstrass$: לכל קבוצה אינסופית ב- X יש נקודת הצטברות).

4) (X,d) שלם וחסום כליל.