83-116-תרגיל 6-פיתרון

## ראשית, נזכיר כי $\boxed{\exists f : A \xrightarrow{\text{הפיכה}} B \Leftrightarrow |A| = |B|}$

1. א. הוכח $|R| = |(0,1)|$.

**הוכחה .**

$f : R \to (0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4x} + 1, x \in [1,\infty) \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, x \in (-1,1) \\ -\frac{1}{4x}, x \in (-\infty,-1] \end{cases}$$

f מוגדרת על תחומים זרים ולכן פונקציה.

f חח"ע בכל תחום והתמונות: $f[[1,\infty)] = [\frac{3}{4},1)$ $\quad f[(-1,1)] = (\frac{1}{4},\frac{3}{4}),$ $\quad f[(-\infty,-1]] = (0,\frac{1}{4}],$ זרות ומכסות את כל הטווח, לכן f חח"ע ועל.

ב. הוכח $\forall a \in R^+ \quad |(-1,1)| = |(-a,a)|$.

$f(x) = ax$ לינארית ולכן חח"ע. $f[(-1,1)] = (-a,a)$ ולכן על.

ג. השתמש ב-ב' כדי להראות שעוצמת הריבוע $A = \{(x,y) \in R^2 : -1 < x < 1 \wedge -1 < y < 1\}$ שווה לעוצמת המלבן $B = \{(x,y) \in R^2 : -2 < x < 2 \wedge -3 < y < 3\}$.

$f(x,y) = (2x,3y)$ לינארית ולכן חח"ע. $f[A] = B$ ולכן על.

ד. הוכח שעוצמת הריבוע $\{(x,y) \in R^2 : -1 \le x \le 1 \wedge -1 \le y \le 1\}$ שווה לעוצמת העיגול $\{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

$B = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ , $A = \{(x,y) \in R^2 : -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ צ"ל $|A| = |B|$

נעזר בפונ' $\begin{cases} h : A -> C \\ h(x,y) = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \end{cases}$ כאשר: $C = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| \le 1\}$ יחד עם קב' A.

המוכיחה לגביהן ש $|A| = |C|$

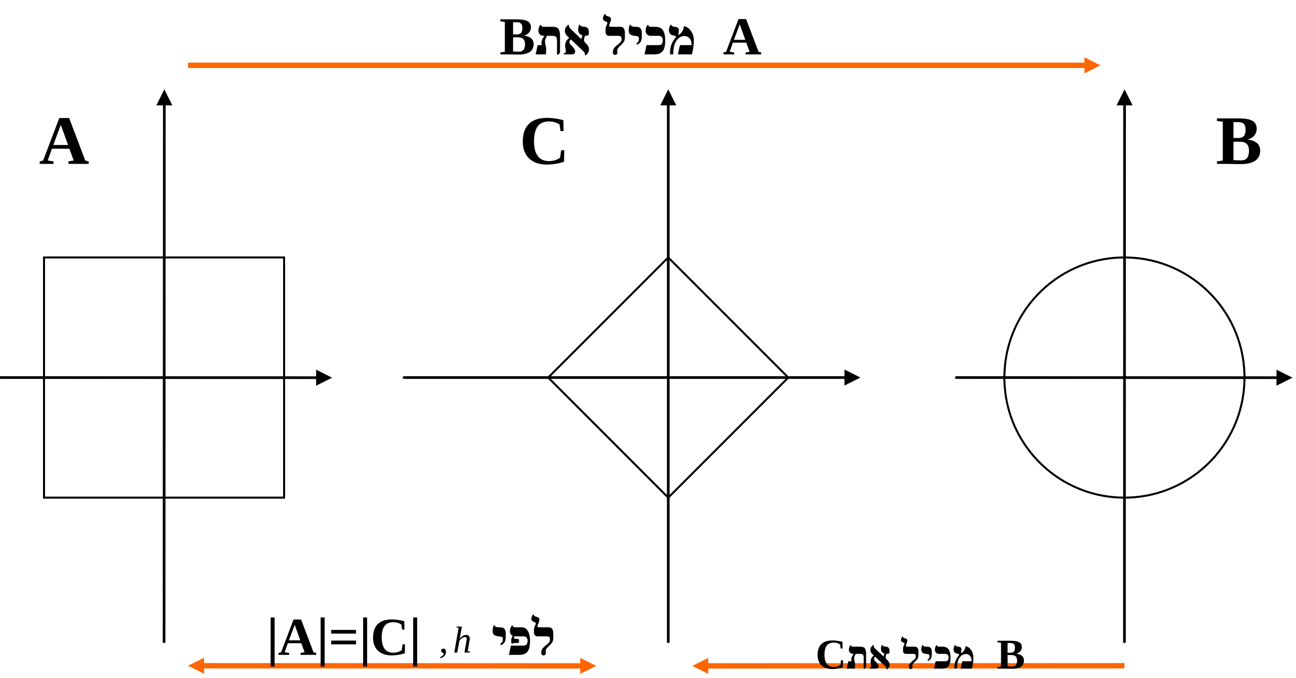
נשים לב ש-

1. $B \subseteq A$ לכן: $f(x)=\begin{cases} x, x\in B \\ 0, x\notin B\end{cases}$ $f: A\to B: \forall x\in A$ היא בוודאי על ולכן $\underline{|A|\geq|B|}$

2. $C \subseteq B$ לכן $g(x)=\begin{cases} x, x\in C \\ 0, x\notin C\end{cases}$ $g: B\to C: \forall x\in B$ היא בוודאי על ולכן

$$|A|\geq|B|\geq|C| \wedge |A|=|C| \Rightarrow |A|=|B|=|C|$$

**ולכן** $|A|=|B|$




2. הוכח $|N|=|N\times N|$.

**הוכחה .**נביט באוסף הזוגות הסדורים של מספרים טבעיים, ונחלק אותם לקבוצות לפי סכום האיברים בזוג. בקבוצה הראשונה יהיה הזוג (1,1), בקבוצה השנייה יהיו הזוגות (1,2),(2,1), בקבוצה השלישית יהיו הזוגות (1,3),(2,2),(3,1) וכדומה.

נגדיר פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ באופן הבא:

- 1נשלח לזוג הראשון בקבוצה הראשונה
- 2נשלח לזוג הראשון בקבוצה השנייה
- 3נשלח לזוג השני בקבוצה השנייה
- 4נשלח לזוג הראשון בקבוצה השלישית
- ...

קל לראות שפונקציה זו מוגדרת היטב. לכל מספר טבעי פשוט עוקבים אחרי התהליך הזה ורואים לאיזה זוג הוא נשלח. כמו כן, לכל זוג ניתן לעבור על התהליך עד שיגיע המספר שישלח אליו.

כמו כן קל לראות שפונקציה זו חח"ע מכיוון שכל זוג מקבל }אינדקס אחד ויחיד וגם על מכיוון שלכל זוג יהיה אינדקס.

3. יהיו B,A קבוצות סופיות. הוכח $|\{f \mid f: A \to B \quad \textit{פונקציה}\}| = |B|^{|A|}$.

נגדיר $|A| = m, |B| = n$.

(אינטואיטיבית, לכל מקור ב-A (ויש m כאלו) קיימות n אופציות ב-B אליהן הוא יכול להשלח:
$|B|^{|A|} = n^m = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{m \text{ פעמים}}$. זוהי בדיוק עוצמת $\underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{m \text{ פעמים}}$.)

נגדיר $A = \{a_1, \ldots, a_m\}, B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ונבנה פונקציה הפיכה

$$g: \{f \mid f: A \to B \quad \textit{פונקציה}\} \to B^m$$

ע"י $g(f) = \left(f(a_1), \ldots, f(a_m)\right)$.

חח"ע:

$$g(f) = g(h)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(f(a_1), \ldots, f(a_m)\right) = \left(g(a_1), \ldots, g(a_m)\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall j = 1, \ldots, m \qquad f(a_j) = g(a_j)$$
$$\Downarrow$$
$$f = h$$

על:

$$\forall \left(b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}\right) \in B^m \qquad \exists f: A \to B \quad : \quad f(a_j) = b_{i_j}$$

ולכן,

$$\forall \left(b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}\right) \in B^m \qquad \exists f: A \to B \quad : \quad g(f) = (f(a_1), \ldots, f(a_m)) = \left(b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}\right)$$

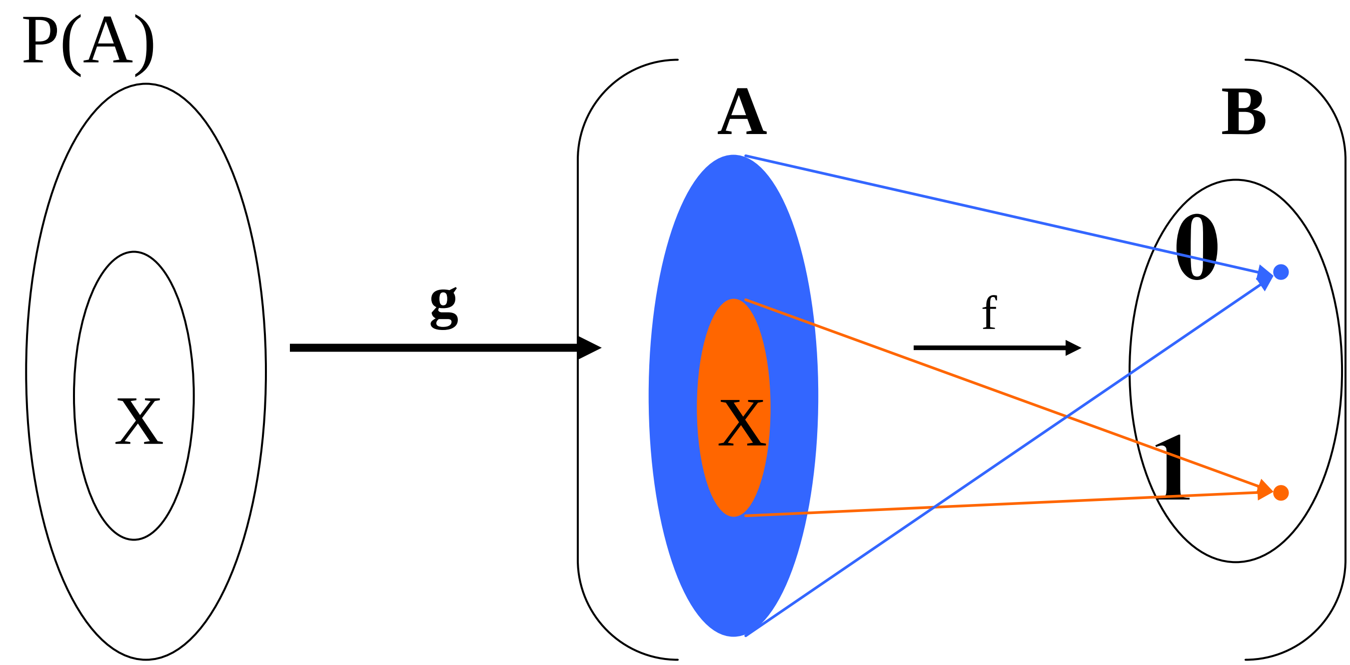
4. הנח נכונות של (3) למקרה הכללי (כלומר, B,A לא בהכרח סופיות) והוכח $P(A) = 2^{|A|}$.
(רמז: בנה התאמה חח"ע ועל מ-P(A) לקבוצת הפונקציות $\{f \mid f: A \to \{0,1\}\}$).

נגדיר: $\{0,1\}^A = \{f \ \text{פונקציה} \mid f: A \to B\}$ עבור B={0,1}, לפי ההנחה $|\{0,1\}^A| = 2^{|A|}$. נוכיח:
$|P(A)| = |B^A|$

$$g: P(A) \to \{f \mid f: A \to \{0,1\}\}$$

$$\underset{\left(\substack{\Downarrow \\ X \subseteq A}\right)}{\forall X \in P(A)} \qquad g(X) = \begin{cases} f: A \to \{0,1\} \ \text{המוגדרת ע"י} \\ \forall a \in A \quad f(a) = \begin{cases} 0, a \notin X \\ 1, a \in X \end{cases} \end{cases}$$

כלומר, כל תת קב' X של A בתחום תשלח לפונ' בטווח השולחת ל-1 את איברי X ול-0 את איברי A\X (נקראת הפונקציה האופיינית של X). לכן אם הקב' שונות הפונ' שונות ולכן לכל מקור תמונה יחידה




<u>g על:</u>

$$\forall f \in \{0,1\}^A \quad \forall a \in A \quad \begin{cases} if \quad f(a) = 0 \quad then \quad a \notin X \\ if \quad f(a) = 1 \quad then \quad a \in X \end{cases} \Rightarrow X \subseteq A \Rightarrow X \in P(A)$$

$$\forall f \in \{0,1\}^A \quad \exists X \in P(A): g(X) = f \Rightarrow g \ \text{על}$$

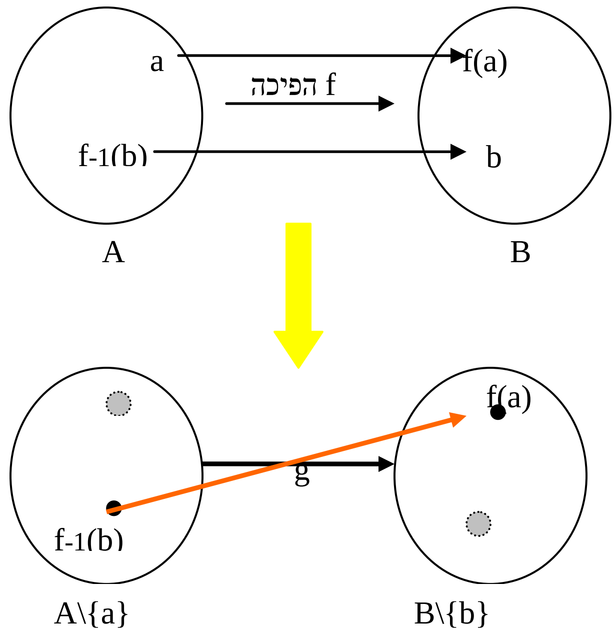
g חח"ע:

$$g(X_1)=g(X_2)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall a\in A \quad f_1(a)=\begin{cases}0, a\notin X_1\\ 1, a\in X_1\end{cases}=\begin{cases}0, a\notin X_2\\ 1, a\in X_2\end{cases}=f_2(a)$$
$$\Downarrow$$
$$a\in X_1 \Leftrightarrow a\in X_2$$
$$\Downarrow$$
$$X_1=X_2$$
$$\Downarrow$$
$$g \quad \text{חח"ע}$$

5. יהיו B,A קבוצות שוות עוצמה ויהיו $a\in A, b\in B$. הוכח $|A\setminus\{a\}|=|B\setminus\{b\}|$.

$$|A|=|B|\Rightarrow \exists f \text{הפיכה}: A\to B\Rightarrow \exists f(a)\in B\wedge \exists f^{-1}(b)\in A$$
$$\text{נגדיר}:$$
$$g: A\setminus\{a\}\to B\setminus\{b\}$$
$$\text{ע"י}:$$
$$\forall x\in A\setminus\{a\} \quad g(x)=\begin{cases}f(x), x\neq f^{-1}(b)\\ f(a), x=f^{-1}(b)\end{cases}$$

כלומר, נבנה את g בדיוק כמו f בכל נקודה פרט לכך שנשלח את מקור הנק' החסרה בטווח $f^{-1}(b)\leftarrow$ לתמונת הנק' החסרה בתחום $f(a)\leftarrow$.




<u>נראה ש g על:</u>

$$\forall y \in B\setminus\{b\}$$

$$\left(y \in \left(B\setminus\{b\}\right)\setminus f(a)\right) \qquad \vee \qquad \left(y = f(a)\right)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$f\text{הפיכה} \Rightarrow \exists x \in \left(A\setminus\{a\}\right)\setminus f^{-1}(b) : y = f(x) = g(x) \qquad\qquad \exists f^{-1}(b) \in A : y = f(a) = g(f^{-1}(b))$$

$$\Rightarrow \forall y \in B\setminus\{b\} \ \ \exists x \in \left(A\setminus\{a\}\right) : y = g(x) \Rightarrow g\text{על}$$

<u>נראה ש g חח"ע:</u>

$$u \neq v$$

$$if \quad u,v \neq f^{-1}(b) \quad then \quad g(u) = f(u) \neq f(v) = g(v) \quad \text{חח"ע} \qquad f \ \text{כי}$$

$$if \quad u \neq f^{-1}(b) \wedge v = f^{-1}(b) \quad then$$

$$g(u) = f(u) \in (B\setminus\{b\})\setminus f(a) \wedge g(v) = f(a) \Rightarrow g(u) \neq g(v)$$

ולכן g חח"ע.