

תרגיל 10

שאלה 1

נניח כי μ ו ν הינן מידות חיוביות סופיות, כך ש ν הינה רציפה בהחלט ביחס ל μ . תהי $\rho = \mu + \nu$. שימו לב כי $\mu \ll \rho$ וגם $\nu \ll \rho$. הוכיחו כי אם $f = \frac{d\mu}{d\rho}$ ו $g = \frac{d\nu}{d\rho}$ אזי:

$$1. f > 0 \text{ כב"מ } \mu.$$

$$2. f + g = 1 \text{ כב"מ } \rho.$$

$$3. d\nu = \frac{g}{f} d\mu.$$

שאלה 2

יהיו μ ו ν שתי מידות חיוביות כך ש $\mu \ll \nu$ ו $\mu = g d\nu$. הראו כי אם f פונקציה אינטגרבלית ביחס ל μ אזי היא אינטגרבלית ביחס ל ν , ומתקיים:

$$\int f g d\nu = \int f d\mu.$$

שאלה 3

חשבו את האינטגרלים הבאים, כאשר μ_F הינה מידת סטילטיס המתאימה לפונקציה F .

$$1. \int_{(-\infty, 0]} f d\mu_F, \text{ כאשר } f \text{ הינה פונקציה רציפה ו: } F(x) := \begin{cases} 2 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$2. \int_{[0, 1]} x d\mu_F(x), \text{ עבור: } F(x) := \begin{cases} 4 & x \geq 1 \\ x + 1 & 0 \leq x < 1 \\ e^x & x < 0 \end{cases}$$

שאלה 4

נגדיר $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י:

$$F(y) := \int_0^\infty \frac{e^{-xy} - e^{-x}}{x} dx$$

הוכיחו ש F גזירה, וחשבו את הנגזרת F' .

בהנאה (: