תרגיל 8

(שימו לב: בתרגיל זה **שתי** השאלות להגשה)

שאלה 1

1. תהי f פונקציה אינטגרבילית אי שלילית בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי אם קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש־f רציפה ב־c ו־ $f(c) \neq 0$, אז $\int_a^b f(x)dx > 0$.

1. האם ניתן לותר על דרישת הרציפות בנקודה c בסעיף 1? נמקו!
2. הוכיחו כי הפונקציה $\frac{1}{\sin x + \cos x}$ אינטגרבילית ב־$[0, \frac{\pi}{2}]$, והוכיחו (מבלי לחשב את האינטגרל) את האי שוויון הבא:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x} \leq \frac{\pi}{2}$$

3. הוכיחו כי:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x} < \frac{\pi}{2}$$

שאלה 2

הוכיחו כי לכל קבוצה של מספרים ממשיים $S \subseteq \mathbb{R}$, ולכל כיסוי של הקבוצה על ידי קטעים פתוחים $\{P_i\}_{i\in I}$, יש תת־כיסוי בן מניה.

הדרכה: בחרו $s \in S$, והתאימו לה קטע פתוח $O_s \in \{P_i\}_I$ ו־$q_s \in O_s$.
כעת, אם $S \setminus O_s \neq \emptyset$, בחרו $s' \in S \setminus O_s$, והתאימו לה $O_{s'} \in \{P_i\}_I \setminus \{O_s\}$, ו־$q_{s'} \in \mathbb{Q} \cap ((\bigcup_{i\in I} P_i) \setminus O_s)$.
בשלב הבא, אם $S \setminus (O_s \cup O_{s'}) \neq \emptyset$, בחרו $s'' \in S \setminus (O_s \cup O_{s'})$, והתאימו לה $O_{s''} \in \{P_i\}_I \setminus \{O_{s'}, O_s\}$, ו־$q_{s''} \in \mathbb{Q} \cap ((\bigcup_{i\in I} P_i) \setminus (O_s \cup O_{s'}))$.
וכך הלאה...
העזרו בתהליך הבנייה כדי להוכיח שהאוסף $\{O_s : \text{s was chosen during the process}\}$ שמתקבל בתום התהליך, מהווה כיסוי בן מניה של S.

בהנאה!