

תרגיל 8

(שימו לב: בתרגיל זה שתי השאלות להגשה)

שאלה 1

1. תהי f פונקציה אינטגרבילית אי שלילית בקטע $[a, b]$.

הוכיחו כי אם קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- f רציפה ב- c ו- $f(c) \neq 0$, אז $\int_a^b f(x) dx > 0$.

1. האם ניתן לותר על דרישת הרציפות בנקודה c בסעיף 1? נמקו!

2. הוכיחו כי הפונקציה $\frac{1}{\sin x + \cos x}$ אינטגרבילית ב- $[0, \frac{\pi}{2}]$, והוכיחו (מבלי לחשב את האינטגרל) את האי שוויון הבא:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x} \leq \frac{\pi}{2}$$

3. הוכיחו כי:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x} < \frac{\pi}{2}$$

שאלה 2

הוכיחו כי לכל קבוצה של מספרים ממשיים $S \subseteq \mathbb{R}$, ולכל כיסוי של הקבוצה על ידי קטעים פתוחים $A = \{P_i\}_{i \in I}$, יש תת-כיסוי בן מנייה.

בהנאה!