תרגיל 8

(שימו לב: בתרגיל זה **שתי** השאלות להגשה)

שאלה 1

1. תהי f פונקציה אינטגרבילית אי שלילית בקטע $[a,b]$.

הוכיחו כי אם קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש־f רציפה ב־c ו־ $f(c) \neq 0$, אז $\int_a^b f(x)dx > 0$.

1. האם ניתן לותר על דרישת הרציפות בנקודה c בסעיף 1? נמקו!
2. הוכיחו כי הפונקציה $\frac{1}{\sin x+\cos x}$ אינטגרבילית ב־$[0,\frac{\pi}{2}]$, והוכיחו (מבלי לחשב את האינטגרל) את האי שוויון הבא:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x} \leq \frac{\pi}{2}$$

3. הוכיחו כי:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x} < \frac{\pi}{2}$$

שאלה 2

הוכיחו כי לכל קבוצה של מספרים ממשיים $S \subseteq \mathbb{R}$, ולכל כיסוי של הקבוצה על ידי קטעים פתוחים $A = \{P_i\}_{i\in I}$, יש תת־כיסוי בן מניה.

הדרכה: לכל $x \in S$ נגדיר את הקטע

$$I_x = \left(\inf\left\{y|\,(y,x) \subseteq \bigcup_{i\in I} P_i\right\}\,,\,\sup\left\{y|\,(x,y) \subseteq \bigcup_{i\in I} P_i\right\}\right) \neq \emptyset$$

הראו:

1. לכל $x \in S$ הקבוצה I_x ניתנת לכיסוי בן מניה ע"י קבוצות מ־ A.
2. לכל $x, x' \in S$ מתקיימים כי $I_x = I_{x'}$ או ש $I_x \cap I_{x'} = \emptyset$.
3. $\bigcup_{x\in S} I_x = S$.

התאימו לכל I_x נקודה q_x כך ש $q_x \in \mathbb{Q} \cap I_x$. כעת, בעזרת ההתאמה והמסקנות הקודמות הסיקו את הנדרש.

בהנאה!