

# בוחרן בדידה

31.7.2016 , כ"ה תמוז תשע"ו

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך הבוחרן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- ניקוד מקסמאלי: 110 נקודות

מבנה הבחינה:

- שלוש שאלות.
- שאלה מספר 1 מכילה 3 סעיפים.
- שאלות מספר 2+3 מכילות 2 סעיפים כל אחת.
- רוב הסעיפים הם סעיפי הוכחה (בפרט כמעט ואין מספרים בבוחרן).

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

**בהצלחה!**

1. נגדיר יחס  $R$  על  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  כך: לכל  $(r_1, m_1), (r_2, m_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

$$(r_1, m_1) R (r_2, m_2) \iff [(r_1 \geq r_2) \wedge (m_1 \leq m_2)]$$

(א) (18 נק') הוכיחו כי יחס סדר.

**פתרון:** נוכיח כי  $R$  רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי-

רפלקסיבי: יהא  $(r, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  צ"ל כי הוא מתייחס לעצמו. אכן  $(r \geq r) \wedge (m \leq m)$  ולכן  $(r, m) R (r, m)$

אנטי סימטרי: נניח  $(r_1, m_1) R (r_2, m_2)$  וגם  $(r_2, m_2) R (r_1, m_1)$  צ"ל  $(r_1, m_1) = (r_2, m_2)$ . אכן, מההנחות נסיק כי  $(r_1 \geq r_2) \wedge (m_1 \leq m_2)$  וגם  $(r_2 \geq r_1) \wedge (m_2 \leq m_1)$

בסידור אחר של הנתונים-  $(r_1 \geq r_2) \wedge (r_2 \geq r_1)$  וגם  $(m_1 \leq m_2) \wedge (m_2 \leq m_1)$  ולכן  $r_1 = r_2$  וגם  $m_1 = m_2$  ולכן  $(r_1, m_1) = (r_2, m_2)$ .

טרנזיטיביות: נניח  $(r_1, m_1) R (r_2, m_2)$  וגם  $(r_2, m_2) R (r_3, m_3)$  צ"ל  $(r_1, m_1) R (r_3, m_3)$ . אכן, מההנחות נסיק כי  $(r_1 \geq r_2) \wedge (m_1 \leq m_2)$  וגם  $(r_2 \geq r_3) \wedge (m_2 \leq m_3)$

בסידור אחר של הנתונים-  $(r_1 \geq r_2) \wedge (r_2 \geq r_3)$  וגם  $(m_1 \leq m_2) \wedge (m_2 \leq m_3)$  מטרנזיטיביות "קטן/גדול שווה" נקבל  $(r_1 \geq r_3) \wedge (m_1 \leq m_3)$  מה שאומר  $(r_1, m_1) R (r_3, m_3)$ .

(ב) (10 נק') האם  $R$  הוא יחס סדר לינארי? אם כן, הוכיחו. אם לא, הפריכו באמצעות דוגמא.

**פתרון:** לא, למשל  $(1, 2), (3, 4)$  לא מתייחסים זה לזה כי

- מתקיים כי  $3 \not\geq 1$  ולכן  $(1, 2) R (3, 4)$  .
- מתקיים כי  $2 \not\leq 4$  ולכן  $(3, 4) R (1, 2)$  .

(ג) (12 נק') נגדיר

$$B = \left\{ \left( 1 - \frac{1}{n}, m \right) : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

תת קבוצה של  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ . מצאו  $\sup(B), \inf(B)$  (שימו לב שאלו איברים ב  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ ), אם הם קיימים. הסבירו את תשובתכם.

**פתרון:** חסם מלרע של  $B$  הוא זוג סדור  $(r, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  כך ש  $r$  גדול מכל  $1 - \frac{1}{n}$  (לכל  $n \in \mathbb{N}$ ) וגם  $k$  קטן מכל  $m$  (לכל  $m \in \mathbb{N}$ ). למשל  $(5, -2)$ .

החסם התחתון של הקבוצה ( $\inf(B)$ ) הוא הכי גדול, ביחס ל  $R$ , המקיים תכונה זאת. קל לראות ש  $\inf(B) = (1, 1)$  הוא המקיים זאת.

חסם מלעיל של  $B$  הוא זוג סדור  $(r, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  כך ש  $r$  קטן מכל  $1 - \frac{1}{n}$  (לכל  $n \in \mathbb{N}$ ) וגם  $k$  גדול מכל  $m$  (לכל  $m \in \mathbb{N}$ ).

לא קיים חסם מלעיל לקבוצה  $B$  (ובפרט לא  $\sup(B)$ ) כיוון שאין מספר שלם  $k$  שגדול מכל מספר טבעי  $m$ .

2. תהא קבוצה  $A$  נגדיר את יחס השיוויון עליה להיות  $I = \{(a, a) : a \in A\}$ . עוד נגדיר את הקבוצה  $L$  להיות קבוצת כל יחסי השקילות על  $A$ . הוכיחו את הבאים:

(א) (17 נק') אזי מתקיים כי

$$I = \bigcap_{R \in L} R$$

**פתרון:** נשתמש בהכלה דו כיוונית.

( $\subseteq$ ) לכל יחס שקילות  $R \in L$  מתקיים כי  $R$  רפלקסיבי. בפרט  $I \subseteq R$  ולכן  $I \subseteq \bigcap_{R \in L} R$ .

( $\supseteq$ ) כיוון ש  $I$  גם הוא יחס שקילות על  $A$  אזי בפרט  $I \in L$  ולכן  $I \supseteq \bigcap_{R \in L} R$ . ביחד נקבל שיוויון בין הקבוצות.

(ב) (23 נק') כעת נוסיף נתון כי ב-  $A$  קיימים לפחות 3 איברים. עוד נגדיר  $L' = L \setminus \{I\}$ . אזי מתקיים כי

$$I = \bigcap_{R \in L'} R$$

**פתרון:** נשתמש בהכלה דו כיוונית.

( $\subseteq$ ) לכל יחס שקילות  $R \in L$  מתקיים כי  $R$  רפלקסיבי. בפרט  $I \subseteq R$  ולכן  $I \subseteq \bigcap_{R \in L} R$ .

( $\supseteq$ ) נסמן  $a_1, a_2, a_3 \in A$  איברים שונים (קיימים לפי הנתון). נגדיר את יחסי השקילות הבאים

$$R_1 = I \cup \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$$

$$R_2 = I \cup \{(a_2, a_3), (a_3, a_2)\}$$

אלו יחסי השקילות (בפרט  $R_1, R_2 \in L'$ ). ב  $R_1$  האיברים השונים היחידים המתייחסים זה לזה הם  $a_1, a_2$  וב  $R_2$  אלו  $a_2, a_3$ . כעת, כיוון שאלו איברים שונים נקבל כי  $R_1 \cap R_2 = I$  ולכן

$$I = R_1 \cap R_2 \supseteq \bigcap_{R \in L'} R$$

ביחד נקבל שיוויון בין הקבוצות.

3. תהא  $U$  קבוצה אוניברסלית. יהיה  $m \in \mathbb{N}$  טבעי נתון ויהיו  $A_1, \dots, A_m \subseteq U$  תתי קבוצות. נגדיר

$$\mathbb{X}_m = \{X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_m \mid \forall 1 \leq i \leq m : (X_i = A_i) \vee (X_i = U \setminus A_i)\}$$

קבוצה  $B \in \mathbb{X}_m$  נקראת קבוצה פונדמנטלית מסדר  $m$  (הערה: הקבוצה  $\mathbb{X}_m$  מסומנת ב  $X$  מודגשת לשם נוחות השאלה בלבד).

(א) (10 נק') תהינה  $B_1 \neq B_2 \in \mathbb{X}_m$  שתי קבוצות פונדמנטליות שונות מסדר  $m$ . הוכיחו כי

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

**פתרון:** נסמן

$$B_1 = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_m, \quad B_2 = Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_m$$

אם לכל  $1 \leq i \leq m$  מתקיים כי  $X_i = Y_i$  אזי  $B_1 = B_2$  ונקבל סתירה לנתון. לכן בהכרח קיים  $i$  כך ש  $X_i \neq Y_i$  ולכן

$$\{X_i, Y_i\} = \{A_i, U \setminus A_i\}$$

כלומר  $X_i$  שווה  $A_i$  ו  $Y_i$  שווה  $U \setminus A_i$ . או להיפך. ולכן  $X_i \cap Y_i = \emptyset$  ולכן

$$B_1 \cap B_2 \subseteq X_i \cap Y_i = \emptyset$$

הקבוצה היחידה המוכללת בקבוצה ריקה זה הקבוצה הריקה בעצמה. אכן קיבלנו  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ .

(ב) (20 נק') הוכיחו כי

$$U = \bigcup_{B \in \mathbb{X}_m} B$$

לכל  $m \in \mathbb{N}$  טבעי [הדרכה אפשרית - הוכיחו באינדוקציה] **פתרון:** בסיס האינדוקציה  $m = 1$ . תהא  $A_1$  קבוצה בודדת ונגדיר  $\mathbb{X}_1$  כמו בשאלה. נקבל כי

$$\mathbb{X}_1 = \{A_1, U \setminus A_1\}$$

ומתקיים כי

$$\bigcup_{B \in \mathbb{X}_m} B = A_1 \cup (U \setminus A_1) = U$$

. כעת נניח שהטענה נכונה עבור  $m$  טבעי מסוים ונוכיח את הטענה עבור  $m+1$ . צ"ל עבור  $m+1$  קבוצות  $A_1, \dots, A_m, A_{m+1}$  והגדרת  $\mathbb{X}_{m+1}$  בשאלה מתקיים כי

$$U = \bigcup_{B \in \mathbb{X}_{m+1}} B$$

נחלק את  $\mathbb{X}_{m+1}$  לשתי קבוצות כך

$$\mathbb{Y}_1 = \{X_1 \cap \dots \cap X_m \cap X_{m+1} \in \mathbb{X}_{m+1} : X_{m+1} = A_{m+1}\} = \{B \cap A_{m+1} \in \mathbb{X}_{m+1} : B \in \mathbb{X}_m\}$$

$$\mathbb{Y}_2 = \{X_1 \cap \dots \cap X_m \cap X_{m+1} \in \mathbb{X}_{m+1} : X_{m+1} = U \setminus A_{m+1}\} = \{B \cap (U \setminus A_{m+1}) \in \mathbb{X}_{m+1} : B \in \mathbb{X}_m\}$$

כלומר  $\mathbb{Y}_1$  שווה לכל החיתוכים כך שהקבוצה האחרונה שנחתכת היא  $A_{m+1}$  ו  $\mathbb{Y}_2$  שווה לכל החיתוכים כך שהקבוצה האחרונה שנחתכת היא  $U \setminus A_{m+1}$ . קל לראות כי

$$\mathbb{X}_{m+1} = \mathbb{Y}_1 \cup \mathbb{Y}_2, \mathbb{Y}_1 \cap \mathbb{Y}_2 = \emptyset$$

ולכן: לכל  $B \in \mathbb{X}_m$  מתקיים

$$B \cap A_{m+1} \in \mathbb{Y}_1, B \cap (U \setminus A_{m+1}) \in \mathbb{Y}_2$$

ואלו כל הקבוצות ב  $\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2$ . כעת

$$\begin{aligned} \bigcup_{B \in \mathbb{X}_{m+1}} B &= \left( \bigcup_{B \in \mathbb{Y}_1} B \right) \cup \left( \bigcup_{B \in \mathbb{Y}_2} B \right) = \\ &\stackrel{(1)}{=} \left( \bigcup_{B \in \mathbb{X}_m} [B \cap A_{m+1}] \right) \cup \left( \bigcup_{B \in \mathbb{X}_m} [B \cap (U \setminus A_{m+1})] \right) \\ &\stackrel{(2)}{=} \bigcup_{B \in \mathbb{X}_m} ([B \cap A_{m+1}] \cup [B \cap (U \setminus A_{m+1})]) \\ &\stackrel{(3)}{=} \bigcup_{B \in \mathbb{X}_m} (B) \\ &\stackrel{(4)}{=} U \end{aligned}$$

כאשר הנימוקים הם: (1) זה הגדרה, (2) כיוון שהאיחוד הוא על מספר סופי של איברים, נוכל לבחור את סדר האיחוד בין הקבוצות (זכרו: איחוד קבוצות הוא קיבוצי). נבחר לאחד את הקבוצות בזוגות כאשר כל זוג הוא מהצורה  $[B \cap A_{m+1}] \cup [B \cap (U \setminus A_{m+1})]$  עבור  $B \in \mathbb{X}_m$  (כלומר קבוצה אחת מ  $\mathbb{Y}_1$  והשניה מ  $\mathbb{Y}_2$ ), (3) פילוג פשוט (חיתוך קבוצה עם קבוצה  $A_{m+1}$  איחוד חיתוך הקבוצה עם המשלים של  $A_{m+1}$  יתן פשוט את הקבוצה), (4) זה הנחת האינדוקציה