קבלת החלטות במשחקים עם מזל

דר ארז שיינר

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University

דילמת האסיר

המשטרה עצרה שני חשודים בפשע ומפרידה אותם לחדרי חקירה שונים, ומציעה להם להודות בפשע ולהפוך לעדי מדינה.

- אם שניהם מודים, הם מקבלים 5 שנים בכלא כל אחד
- אם האחד מודה והשני לא, עד המדינה יוצא לחופשי והשני מקבל 15 שנים בכלא.
- אם שניהם אינם מודים, הם יקבלו שנה 1 בכלא כל אחד.

מה הם צריכים לעשות?
האם זה משנה אם הם הספיקו לדבר קודם בתא המעצר?

דילמת האסיר

נציג את ה"משחק" בטבלה:

חשודה II חשוד I	מודה	לא מודה
מודה	-5,-5	0,-15
לא מודה	-15,0	-1,-1

הגרלה

נביט בהגרלה של 1010 שקלים, עם עלות השתתפות של 10 שקלים.

מכונת הימורים שחקנית	זכייה	הפסד
משחקת	1000	-10
לא משחקת	0	0

הגרלה

אם היא תבחר לשחק, בסיכוי של אחד למאה היא תרוויח 1000 שקלים, ובסיכוי של 99 למאה היא תפסיד 10.

לכן בממוצע היא תרוויח:

$$\frac{1}{100} \cdot 1000 + \frac{99}{100} \cdot 10 = 19.9$$

מכונת הימורים / שחקנית	1%	99%
משחקת	1000	-10
לא משחקת	0	0

כעת נביט בהגרלה הבאה במיליונים.

הייתם משתתפים?

99%	1%	מכונת הימורים שחקנית
10M	-1M	משחקת
0	0	לא משחקת

אם תשתתף, השחקנית תקבל בממוצע:

$$\frac{1}{100}\cdot(-1)+\frac{99}{100}\cdot 10 = 9.89M$$

מכונת הימורים / שחקנית	1%	99%
משחקת	-1M	10M
לא משחקת	0	0

אם תשתתף, השחקנית תקבל בממוצע:

$$\frac{1}{100}\cdot(-1)+\frac{99}{100}\cdot 10=9.89M$$

אם לא תשתף, תבטיח שלא תקבל פחות מאפס.

מכונת הימורים שחקנית	1%	99%
משחקת	-1M	10M
לא משחקת	0	0


לקטנים.
י. אלתרמן.
זוג או פרט?
(משחק לפסח)
באגוזים נשחקה—
חג הפסח בא;
זוג או פרט, זוג או פרט —
בחש, נחש נא.
אם נחשת ומצאת —
כלם הם שלך;

כעת נביט במשחק זוג או פרט.

מה כדאי לעשות במשחק?

שחקן זוג שחקנית פרט	זוגי	אי זוגי
זוגי	-1	1
אי זוגי	1	-1


לִקְטַנִּים.

י. אלתרמן.

זוּג אוֹ פֶרֶט?

(מִשְׂחָק לְפֶסַח)

בֶּאֱגוֹזִים נְשַׂחֲקָה—
חַג הַפֶּסַח בָּא;
זוּג אוֹ פֶרֶט, זוּג אוֹ פֶרֶט —
נַחֵשׁ, נַחֵשׁ נָא.
אִם נִחַשְׁתָּ וּמָצָאתָ —
כֻּלָּם הֵם שֶׁלְּךָ;

נניח ששחקן הזוג שולף זוג אצבעות בסיכוי p אחרת הוא שולף אצבע אחת.

שחקן זוג / שחקנית פרט	p	1-p
זוגי	-1	1
אי זוגי	1	-1


לִקְטַנִּים.
י. אלתרמן.
זוּג אוֹ פֶּרֶט?
(מִשְׂחָק לְפֶסַח)
בָּאֱגוֹזִים נְשַׂחֵקָה —
חַג הַפֶּסַח בָּא;
זוּג אוֹ פֶּרֶט, זוּג אוֹ פֶּרֶט —
נַחֵשׁ, נַחֵשׁ נָא.
אִם נִחַשְׁתָּ וּמָצָאתָ —
כֻּלָּם הֵם שֶׁלְּךָ;

אם שחקנית אחת תשלוף שתי אצבעות היא תקבל בממוצע

$$p \cdot (-1) + (1 - p) \cdot 1 = 1 - 2p$$

ואילו אם תשלוף אצבע אחת היא תקבל בממוצע

$$p \cdot 1 + (1 - p) \cdot (-1) = 2p - 1$$

שחקן זוג שחקנית פרט	p	1-p
זוגי	-1	1
אי זוגי	1	-1

כלומר אם שחקן הזוג יגריל בהסתברות שווה של חצי,

הוא יהפוך את הבחירה של שחקנית הפרט לחסרת משמעות.

שחקן זוג שחקנית פרט	p	1-p
זוגי	-1	1
אי זוגי	1	-1

תורת המשחקים בווימבלדון

המגיש במשחק טניס בוחר האם להגיש לימין או לשמאל המגרש.

מהירות הכדור בחבטה הממוצעת גדולה, ולא מותירה זמן רב לתגובה.
(למשל פדרד מגיש בממוצע במהירות של מעל 200 קמ"ש.)

השחקנית העונה בוחרת אם להתכונן לחבטה לצד ימין או לצד שמאל.

חלק זה מבוסס על המאמר הבא:

Walker, Mark, and John Wooders. "Minimax play at Wimbledon." American Economic Review 91.5 (2001): 1521-1538.

תורת המשחקים בווימבלדון

נתאר את הסיכויים לניצחון המגיש בנקודה בטבלה הבאה:

ימין	שמאל	עונה / מגיש
0.79	0.58	שמאל
0.49	0.73	ימין

נחשב את ממוצע הצלחת המגיש, בהנחה שהעונה מתכוננת לשמאל בהסתברות p.

עונה / מגיש	p	1-p
שמאל	0.58	0.79
ימין	0.73	0.49

אם יחבוט לכיוון שמאל סיכוי המגיש להרוויח את הנקודה הוא:

$$p \cdot 0.58 + (1-p) \cdot 0.79 = 0.79 - 0.21p$$

אם יחבוט לימין הסיכוי הוא:

$$p \cdot 0.73 + (1-p) \cdot 0.49 = 0.49 + 0.24p$$

אם העונה תבחר בהסתברות המעניקה למגיש יתרון ברור לאחד הצדדים, נקבל משחק שאינו יציב.

אם העונה תבחר בהסתברות המעניקה למגיש יתרון ברור לאחד הצדדים, נקבל משחק שאינו יציב.

הרי אם המגיש תמיד יבחר באותו צד, העונה תעדיף להתכונן לצד הזה בהסתברות 1.

תורת המשחקים בווימבלדון

אם העונה תבחר בהסתברות המעניקה למגיש יתרון ברור לאחד הצדדים, נקבל משחק שאינו יציב.

הרי אם המגיש תמיד יבחר באותו צד, העונה תעדיף להתכונן לצד הזה בהסתברות 1.

במצב כזה, המגיש יעדיף את הצד השני, וחוזר חלילה.

שיווי משקל נאש

לכן אנחנו מחפשים הסתברות של העונה עבורה סיכויי המגיש שווים בשני הכיוונים.

שיווי משקל נאש

לכן אנחנו מחפשים הסתברות של העונה עבורה סיכויי המגיש שווים בשני הכיוונים.

$$0.79 - 0.21p = 0.49 + 0.24p$$

שיווי משקל נאש

לכן אנחנו מחפשים הסתברות של העונה עבורה סיכויי המגיש שווים בשני הכיוונים.

$$0.79 - 0.21p = 0.49 + 0.24p$$

ונקבל כי העונה תתכונן לשמאל בהסתברות:

$$p = \frac{2}{3}$$

שיווי משקל נאש

לכן אנחנו מחפשים הסתברות של העונה עבורה סיכויי המגיש שווים בשני הכיוונים.

$$0.79 - 0.21p = 0.49 + 0.24p$$

ונקבל כי העונה תתכונן לשמאל בהסתברות:

$$p = \frac{2}{3}$$

במצב זה, ללא תלות בבחירת הכיוון של המגיש, הוא ירוויח את הנקודה בסיכוי 0.65

לכן אנחנו מחפשים הסתברות של העונה עבורה סיכויי המגיש שווים בשני הכיוונים.

$$0.79 - 0.21p = 0.49 + 0.24p$$

ונקבל כי העונה תתכונן לשמאל בהסתברות:

$$p = \frac{2}{3}$$

במצב זה, ללא תלות בבחירת הכיוון של המגיש, הוא ירוויח את הנקודה בסיכוי 0.65

ניתן לחשב באופן דומה, שאם המגיש יגיש לשמאל בסיכוי 0.53 לא תהיה משמעות לבחירת העונה.

שיווי משקל נאש

לכן אנחנו מחפשים הסתברות של העונה עבורה סיכויי המגיש שווים בשני הכיוונים.

$$0.79 - 0.21p = 0.49 + 0.24p$$

ונקבל כי העונה תתכונן לשמאל בהסתברות:

$$p = \frac{2}{3}$$

במצב זה, ללא תלות בבחירת הכיוון של המגיש, הוא ירוויח את הנקודה בסיכוי 0.65

ניתן לחשב באופן דומה, שאם המגיש יגיש לשמאל בסיכוי 0.53 לא תהיה משמעות לבחירת העונה.

המצב בו שני השחקנים יבחרו בהסתברויות אלה נקרא שיווי משקל נאש, מצב בו אף שחקן לא ירוויח מהחלפת אסטרטגיה אם האחר לא יחליף.

בעיטות פנדל

בעיטת פנדל כל כך מהירה, שהשוער צריך להחליט לאן לקפוץ לפני הבעיטה.

השוער יכול לקפוץ ימינה, שמאלה או להשאר באמצע.

הבועט יכול לבעוט ימינה, שמאלה או לכיוון האמצע.

לכל שילוב אסטרטגיות יש סיכוי מסויים להבקעת שער, נציג זאת בטבלה.

בדוגמא זו נעזרתי בנתונים מהמאמר

Chiappori, P-A., Steven Levitt, and Timothy Groseclose. "Testing mixed-strategy equilibria when players are heterogeneous: The case of penalty kicks in soccer." American Economic Review 92.4 (2002): 1138-1151.

בכל שילוב אסטרטגיות בטבלה רשום הסיכוי להבקעה באחוזים

בועט שוער	שמאל	מרכז	ימין
שמאל	0.6	0.8	0.9
מרכז	1	0	1
ימין	0.95	0.8	0.45

בהנחה שהשוער יקפוץ שמאלה בסיכוי p ולמרכז בסיכוי q נחשב את התשלום של הבועט בכל אחת מן האסטרטגיות הטהורות (כלומר שהוא בוחר אסטרטגיה אחת בסיכוי 1).

בועט / שוער	0.6p+q+0.95(1-p-q)	**0.8p+0.8(1-p-q)**	**0.9p+q+0.45(1-p-q)**
p	0.6	0.8	0.9
q	1	0	1
1-p-q	0.95	0.8	0.45

בעיטות פנדל

נחפש נקודת שיווי משקל בה התשלום של הבועט שווה בשלושת האסטרטגיות.

זה לא אומר שאין נקודות שיווי משקל בהן אחת משלושת האסטרטגיות פחות שווה משתי האחרות.

אך בוודאות אין נקודות שיווי משקל בה התשלום גבוהה ביותר באסטרטגיה יחידה, כי ראינו שבהנתן שהבועט יבעט לכיוון מסויים, התגובה המיטבית של השוער לא מובילה לשיווי משקל.

נחפש נקודת שיווי משקל בה התשלום של הבועט שווה בשלושת האסטרטגיות.

זה לא אומר שאין נקודות שיווי משקל בהן אחת משלושת האסטרטגיות פחות שווה משתי האחרות.

אך בוודאות אין נקודות שיווי משקל בה התשלום גבוהה ביותר באסטרטגיה יחידה, כי ראינו שבהנתן שהבועט יבעט לכיוון מסויים, התגובה המיטבית של השוער לא מובילה לשיווי משקל.

אנו רוצים למצוא פתרון למערכת המשוואות

$$0.6p+q+0.95(1-p-q)=0.8p+0.8(1-p-q)=0.9p+q+0.45(1-p-q)$$

בעיטות פנדל

נקבל כי כאשר השוער קופץ שמאלה בהסתברות $p=0.58$, למרכז בהסברות $q=0.06$ ולצד ימין בהסתברות 0.35, כל אסטרטגיה מעורבת של הבועט מניבה את אותו התשלום.

תשלום זה הינו הבקעת שער בסיכוי 74.9%.

נחשב באופן דומה הסתברויות עבור השוער.

נניח שהבועט מכוון לשמאל בהסתברות p, ולמרכז בהסתברות q.

נשווה את תשלומי השוער בשלושת האסטרטגיות.

$$0.4p+0.2q+0.1(1-p-q)=q=0.05p+0.2q+0.55(1-p-q)$$

נקבל שהבועט צריך לבעוט שמאלה בסיכוי 0.42, למרכז בסיכוי 0.25 וימינה בסיכוי 0.33.

בנקודה זו נקבל את שיווי המשקל.

בעיטות פנדל

נביט בסטטיסטיקה האמיתית של בעיטות הפנדלים שנסקרו במאמר.

מתוך 459 בעיטות פנדל בליגה הצרפתית ובליגה האיטלקית,

ב56% מהן השוער קפץ לשמאל, ב2% נשאר במרכז וב41% קפץ לימין,

44% נבעטו שמאלה, 17% למרכז ו38% נבעטו ימינה.

סה"כ 74.9% מהבעיטות הסתיימו בהבקעת שער.

שימו לב שתוצאות אלו מאד קרובות לשיווי המשקל שחזינו.

דו שיח

תודה רבה על ההקשבה!

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University