ליניארית – תרגול 12 – קיץ 2011

תרגיל 2.15 (עמוד 72):

הוכיחו לכל A מעל $\mathbb{C}$ עם דטרמיננטה שונה מאפס קיים $c\in\mathbb{C}$ כך ש- $|cA|=1$

פתרון:

$$|A|=b\Rightarrow\frac{1}{b}|A|=1\Rightarrow\left|\sqrt[n]{\frac{1}{b}}A\right|=1\Rightarrow\underbrace{c\overset{\text{נגדיר}}{=}\sqrt[n]{\frac{1}{b}}}_{\text{תמיד קיים לפי המשפט היסודי של האלגברה}}$$

תרגיל 4.3 (עמוד 75):

תהי $A\in R^{nxn}$ כך שלכל i,j $a_{i,j}=\pm1$. הוכיחו כי $2^{n-1}\mid\det(A)$.

פתרון:

$$\begin{vmatrix}\begin{pmatrix}\pm1&\pm1&\cdots&\pm1\\\pm1&\pm1&\cdots&\pm1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\pm1&\pm1&\cdots&\pm1\end{pmatrix}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\begin{pmatrix}\pm1&\pm1&\cdots&\pm1\\0&\pm2,0&\cdots&\pm2,0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\pm2,0&\cdots&\pm2,0\end{pmatrix}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}\begin{pmatrix}\pm1&\pm1&\cdots&&\pm1\\0&\pm2,0&\cdots&&\pm2,0\\0&0&\pm4,0&&\pm4,0\\\vdots&\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\pm4,0&\cdots&\pm4,0\end{pmatrix}\end{vmatrix}=\ldots=\underbrace{\begin{vmatrix}\begin{pmatrix}\pm1&\pm1&\cdots&&\pm1\\0&\pm2,0&\cdots&&\pm2,0\\0&0&\pm4,0&&\pm4,0\\\vdots&\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\pm2^{n-1},0\end{pmatrix}\end{vmatrix}}_{\text{מכפלת אייברי האלכסון.}}$$

תרגיל:

$$\begin{vmatrix}\alpha&1&\cdots&1\\1&\alpha&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&\alpha\end{vmatrix}=?\,.$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix} \xrightarrow{\sum R_i \to R_1} \begin{vmatrix} \alpha+n-1 & \alpha+n-1 & \cdots & \alpha+n-1 \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix} \longrightarrow (\alpha+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{i\neq 1}-R_1} (\alpha+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+n-1)(\alpha-1)^{n-1}$$

תרגיל:

א) תהי A מטריצה ממשית והפיכה המקיימת $A^4+2A=0$. חשבו את $|A|$.

ב) הוכיחו שאם קיימים $a_1,a_2,...a_k$ סקלרים כך שמתקיים $I+a_1A+a_2A^2+...+a_kA^k=0$ אז המטריצה A היא הפיכה.

ג) תהיינה A,B מטריצות $n\times n$ כאשר n מספר אי זוגי, מעל שדה שאיננו ממאפיין 2. נתון שמתקיים $AB+BA=0$. הוכיחו שלפחות אחת המטריצות A או B היא לא הפיכה.

פתרון:

א)

$$A^4+2A=0 \Rightarrow A^4=-2A \Rightarrow \det\left(A^4\right)=\det\left(-2A\right) \Rightarrow \left(\det A\right)^4 =$$
$$\left(-2\right)^n \cdot \det A \Rightarrow \left(\det A\right)^4-\left(-2\right)^n \det A = 0$$
$$\Rightarrow \det A \cdot \left[\left(\det A\right)^3-\left(-2\right)^n\right]=0$$

מהנתונים שבנוסח השאלה נתון כי A מטריצה ממשית והפיכה כלומר $\det(A)\neq 0$ ולכן יוצא

$$\left(\det A\right)^3=\left(-2\right)^n \Rightarrow \det A=\left(-2\right)^{\frac{n}{3}}$$

ב) $I+a_1A+a_2A^2+...+a_kA^k=0 \Rightarrow I=-a_1A-a_2A^2-...-a_kA^k$

$\Rightarrow I=A(-a_1I-a_2A^1-...-a_kA^{k-1})$ **כלומר** $A^{-1}=-a_1I-a_2A^1-...-a_kA^{k-1}$

ג) $AB+BA=0 \Rightarrow AB=-BA \Rightarrow \det(AB)=\det(-BA) \Rightarrow \det(A)\cdot\det(B)=(-1)^{2k+1}\cdot\det(B)\cdot\det(A)$

כלומר מתקיים: $2\cdot\det(A)\cdot\det(B)=0$ כלומר $\det(A)=0$ או $\det(B)=0$ כלומר לפחות אחת מהמטריצות איננה הפיכה.

דטרמיננטת העתקות לנאריות:

V מ"ו, B בסיס ל-V, $T:V\to V$ ה"ל. דט' T מוגדרת ע"י: $|T|=|[T_B]|$ ואיננה תלויה בבחירת הבסיס.

תרגיל 8.1ב,ג (עמוד 77):

יהיו $T,S:V\to V$ ה"ל. הוכיחו:

ב. T הפיכה אמ"מ הדט' שלה שונה מ-0 (או: T איננה הפיכה אמ"מ הדט' שלה שווה-0)

ג. $\det(ST)=\det S\det T$

פתרון:

ב. T איננה הפיכה אמ"מ הגרעין שלה שונה מאפס אמ"מ קיים וקטור v שונה מאפס כך ש-Tv=0 (נרחיב את v לבסיס B) אמ"מ ב- $[T]_B$ קיימת שורת אפסים אמ"מ דט' T היא אפס.

ג. $|S||T|=|[S]_B||[T]_B|=|[S]_B[T]_B|=|[S\circ T]_B|=|S\circ T|$

המטריצה המצורפת/הנלוית (adjoint):

תהי $A=(a_{ij})\in F^{nxn}$ אז $adj(A)=(b_{ij})=\left((-1)^{i+j}|M_{ji}|\right)$

טענה: 1. $(\det A)\cdot I=A\cdot adjA$

2. אם A הפיכה אז: $A^{-1}=\dfrac{adjA}{\det A}$

דוגמא:

תהי $A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\5&8&0\\-3&1&2\end{pmatrix}$. מצאו: $adjA,\det A,A^{-1}$

פתרון:

$$adjA=\begin{pmatrix}16&-1&8\\-10&1&-5\\29&-2&16\end{pmatrix}$$

$$\det A=3$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}adjA$$

<u>תרגיל 9.5 (עמוד 77):</u> (אולי נוותר על זה? קצת מייגע... לא?)

$A=\begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}\in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$.

א. חשב את $\mathrm{adj}(A)$.

ב. הראה בעזרת (א), ש $|A|=b-a$,

<u>פתרון:</u>

$$adjA=\begin{pmatrix} b^2-a^2 & a^2-ab & a^2-ab \\ a^2-ab & b^2-a^2 & a^2-ab \\ a^2-ab & a^2-ab & b^2-a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (b-a)(b+a) & a(a-b) & a(a-b) \\ a(a-b) & (b-a)(b+a) & a(a-b) \\ a(a-b) & a(a-b) & (b-a)(b+a) \end{pmatrix}=$$

$$(a-b)\begin{pmatrix} -(b+a) & a & a \\ a & -(b+a) & a \\ a & a & -(b+a) \end{pmatrix}$$

$$\det A\cdot I=\begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix}(a-b)\begin{pmatrix} -(b+a) & a & a \\ a & -(b+a) & a \\ a & a & -(b+a) \end{pmatrix}=$$

$$(a-b)\begin{pmatrix} -b(b+a)+2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -b(b+a)+2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -b(b+a)+2a^2 \end{pmatrix}=(b-a)I \downarrow$$

$$(a-b)(-b(b+a)+2a^2=b^3-a^2b+2a^3-2ba^2=b+2a=b-a$$

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו $|adj(A)|=|A|^{n-1}$.

<u>פתרון:</u>

ידוע:

$$|A|I=Aadj(A)$$

$$\exists A^{-1}\Rightarrow |A|\neq 0:\left||A|I\right|=|Aadj(A)|\Rightarrow |A|^n=|A||adj(A)|\Rightarrow |A|^{n-1}=|adj(A)|$$

$$\nexists A^{-1}\Rightarrow |A|=0\Rightarrow |A^{n-1}|=0:\left||A|I\right|=|Aadj(A)|\Rightarrow 0=|A||adj(A)|=0$$

<u>תרגיל:</u>

א. נתונה הדטרמיננטה : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & l \end{vmatrix}=2$. מצאו למה שווה הדטרמיננטה:

$$\begin{vmatrix} l-4c & f & 2l+f \\ m-4a & d & 2m+d \\ n-4b & e & 2n+e \end{vmatrix}=?$$

ב. הוכיחו או הפריכו: אם A היא מטריצה שאיבריה מספרים שלמים וגם האיברים של A^{-1} הם שלמים , אז $|A|^{2000}=1$.

<u>פתרון:</u>

.a
$$\begin{vmatrix} l-4c & f & 2l+f \\ m-4a & d & 2m+d \\ n-4b & e & 2n+e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l-4c & f & 2l \\ m-4a & d & 2m \\ n-4b & e & 2n \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} l-4c & f & l \\ m-4a & d & m \\ n-4b & e & n \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4c & f & l \\ -4a & d & m \\ -4b & e & n \end{vmatrix} =$$
$$= -8\begin{vmatrix} c & f & l \\ a & d & m \\ b & e & n \end{vmatrix} = -8(-1)^2\begin{vmatrix} a & d & m \\ b & e & n \\ c & f & l \end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & l \end{vmatrix} = -16$$

.b אם איברי המטריצה שלמים, אזי גם הדטרמיננטה שלה שלמה (הרי היא סכום של מכפלות של שלמים). באופן דומה, גם הדטרמיננטה של ההופכית הינה שלמה.
$1=|I|=|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|$. המספרים השלמים היחידים שכפולתם הינה אחד הם ±1 ולכן $|A|=\pm1$, ומתקיים תמיד ש $(\pm1)^{2000}=1$

<u>שאלה:</u>

תהי A מטריצה ששורותיה תלויות לינארית

.a הוכח/הפרך: כל מינור של המטריצה מקיים $|A_{ij}|=0$

.b תהי A אנטי סימטרית כך ש $|A-I|=2$ חשב את $|A^2+2A+I|$

<u>פתרון:</u>

א. הפרכה: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, |A_{11}|=2\neq 0$

ב. $|A^2+2A+I|=|(A^2+2A+I)^t|=|A^2-2A+I|=|(A-I)^2|=|A-I|^2=4$

<u>משפט קרמר:</u>

נתונה מערכת משוואות Ax=b עבור מטריצה ריבועית A מסדר n אשר הדטרמיננטה שלה איננה מתאפסת. אזי אוסף הפתרונות $x_1,...,x_n$ של המערכת מקיימים $\forall i=1,...,n \quad x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$ כאשר A_i מתקבלת ע"י מחיקת העמודה ה-i ב-A והצבת b במקומה.

<u>דוגמא:</u>

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ x+z=3 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad , |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow y = -2 \quad , \quad |A_3 =| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow z = 2$$

<u>תרגיל 10.3 (עמוד 79):</u>

פתרו בעזרת נוסחת קרמר את המערכת הבאה: $\begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ x-y+5z-w=5 \end{cases}$

<u>פתרון:</u>

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1 \\ x-y+5z-w=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=1-w-z \\ x-y=5+w-5z \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1-w-z & -2 \\ 5+w-5z & -1 \end{vmatrix} = 3w+11z+9 \Rightarrow x = 3w+11z+9$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1-w-z \\ 1 & 5+w-5z \end{vmatrix} = 4+2w-4z \Rightarrow y = 4+2w-4z$$