

ליניארית – תרגול 12 – קיץ 2011

תרגיל 2.15 (עמוד 72):

הוכיחו לכל A מעל \mathbb{R} עם דטרמיננטה שונה מאפס קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש- $|cA| = 1$

פתרון:

$$|A| = b \Rightarrow \frac{1}{b}|A| = 1 \Rightarrow \left| \sqrt[n]{\frac{1}{b}} A \right| = 1 \Rightarrow c = \sqrt[n]{\frac{1}{b}}$$

↓

תמיד קיים לפי המשפט היסודי של האלגברה

תרגיל 4.3 (עמוד 75):

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך שלכל n, j $a_{i,j} = \pm 1$. הוכיחו כי $|\det(A)| = 2^{n-1}$.

פתרון:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ 0 & \pm 2,0 & \dots & \pm 2,0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \pm 2,0 & \dots & \pm 2,0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ 0 & \pm 2,0 & \dots & \pm 2,0 \\ 0 & 0 & \pm 4,0 & \pm 4,0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \pm 4,0 & \dots & \pm 4,0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ 0 & \pm 2,0 & \dots & \pm 2,0 \\ 0 & 0 & \pm 4,0 & \pm 4,0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \pm 2^{n-1},0 \end{pmatrix}$$

↓

מכפלת אייברי האלכסון.

תרגיל:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \alpha \end{vmatrix} = ?$$

פתרון:

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix} &\xrightarrow{\sum R_i \rightarrow R_1} \begin{vmatrix} \alpha+n-1 & \alpha+n-1 & \cdots & \alpha+n-1 \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix} \xrightarrow{(\alpha+n-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{R_{i \neq 1} - R_1} (\alpha+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+n-1)(\alpha-1)^{n-1}
 \end{aligned}$$

תרגיל:

- (א) תהי A מטריצה ממשית והפיכה המקיימת $A^4 + 2A = 0$. חשבו את $|A|$.
- (ב) הוכיחו שאם קיימים סקלרים a_1, a_2, \dots, a_k כך שמתקיים $I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_kA^k = 0$ אז המטריצה A היא הפיכה.
- (ג) תהיינה A, B מטריצות $n \times n$ כאשר n מספר אי זוגי, מעל שדה שאיננו ממאפיין 2. נתון שמתקיים $AB + BA = 0$. הוכיחו שלפחות אחת המטריצות A או B היא לא הפיכה.

פתרון:

$$\begin{aligned}
 &\text{(א)} \\
 A^4 + 2A = 0 &\Rightarrow A^4 = -2A \Rightarrow \det(A^4) = \det(-2A) \Rightarrow (\det A)^4 = \\
 &(-2)^n \cdot \det A \Rightarrow (\det A)^4 - (-2)^n \det A = 0 \\
 &\Rightarrow \det A \cdot [(\det A)^3 - (-2)^n] = 0
 \end{aligned}$$

מהנתונים שבנוסח השאלה נתון כי A מטריצה ממשית והפיכה כלומר $\det(A) \neq 0$ ולכן יוצא

$$(\det A)^3 = (-2)^n \Rightarrow \det A = (-2)^{\frac{n}{3}}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{(ב)} \quad I = -a_1A - a_2A^2 - \dots - a_kA^k \quad I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_kA^k = 0 \Rightarrow \\
 &A^{-1} = -a_1I - a_2A^1 - \dots - a_kA^{k-1} \quad \text{כלומר} \quad \Rightarrow I = A(-a_1I - a_2A^1 - \dots - a_kA^{k-1})
 \end{aligned}$$

(ג) $AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA \Rightarrow \det(AB) = \det(-BA) \Rightarrow \det(A) \cdot \det(B) = (-1)^{2k+1} \cdot \det(B) \cdot \det(A)$ (ג)
 כלומר מתקיים: $2 \cdot \det(A) \cdot \det(B) = 0$ כלומר $\det(A) = 0$ או $\det(B) = 0$ כלומר לפחות אחת מהמטריצות איננה הפיכה.

דטרמיננטת העתקות לנאריות:

V מ"ו, B בסיס ל- V , $T: V \rightarrow V$ ה"ל. דט' T מוגדרת ע"י: $|T| = |[T_B]$ ואיננה תלויה בבחירת הבסיס.

תרגיל 8.1, ב, ג (עמוד 77):

יהיו $T, S: V \rightarrow V$ ה"ל. הוכיחו:

ב. T הפיכה אמ"מ שלה שונה מ-0 (או: T איננה הפיכה אמ"מ הדט' שלה שווה-0)

ג. $\det(ST) = \det S \det T$

פתרון:

ב. T איננה הפיכה אמ"מ הגרעין שלה שונה מאפס אמ"מ קיים וקטור v שונה מאפס כך ש- $Tv=0$
(נרחיב את v לבסיס B) אמ"מ ב- $[T]_B$ קיימת שורת אפסים אמ"מ דט' T היא אפס.

$$|S||T| = |[S]_B| |[T]_B| = |[S]_B [T]_B| = |[S \circ T]_B| = |S \circ T|. \text{ ג.}$$

המטריצה המצורפת/הנלוית (adjoint):

תהי $A = (a_{ij}) \in F^{n \times n}$ אז $adj(A) = (b_{ij}) = ((-1)^{i+j} |M_{ji}|)$

טענה: 1. $(\det A) \cdot I = A \cdot adj A$

2. אם A הפיכה אז: $A^{-1} = \frac{adj A}{\det A}$

דוגמא:

תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ מצאו: $adj A, \det A, A^{-1}$

פתרון:

$$adj A = \begin{pmatrix} 16 & -1 & 8 \\ -10 & 1 & -5 \\ 29 & -2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3$$

↓

$$A^{-1} = \frac{1}{3} adj A$$

תרגיל 9.5 (עמוד 77): (אולי נותר על זה? קצת מייגע... לא?)א. חשב את $\text{adj}(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3 \times 3}, \quad |A| = b - a \neq 0$$

פתרון:

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & a^2 - ab & a^2 - ab \\ a^2 - ab & b^2 - a^2 & a^2 - ab \\ a^2 - ab & a^2 - ab & b^2 - a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b-a)(b+a) & a(a-b) & a(a-b) \\ a(a-b) & (b-a)(b+a) & a(a-b) \\ a(a-b) & a(a-b) & (b-a)(b+a) \end{pmatrix} =$$

$$(a-b) \begin{pmatrix} -(b+a) & a & a \\ a & -(b+a) & a \\ a & a & -(b+a) \end{pmatrix}$$

$$\det A \cdot I = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{pmatrix} (a-b) \begin{pmatrix} -(b+a) & a & a \\ a & -(b+a) & a \\ a & a & -(b+a) \end{pmatrix} =$$

$$(a-b) \begin{pmatrix} -b(b+a) + 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -b(b+a) + 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -b(b+a) + 2a^2 \end{pmatrix} = (b-a)I$$

$$(a-b)(-b(b+a) + 2a^2) = b^3 - a^2b + 2a^3 - 2ba^2 = b + 2a = b - a$$

תרגיל:

$$|adj(A)| = |A|^{n-1}$$

פתרון:

ידוע:

$$|A|I = A \text{adj}(A)$$

$$\exists A^{-1} \Rightarrow |A| \neq 0 : |A|I = |A \text{adj}(A)| \Rightarrow |A|^n = |A| |adj(A)| \Rightarrow |A|^{n-1} = |adj(A)|$$

$$\nexists A^{-1} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow |A|^{n-1} = 0$$

בניח: $|adjA| \neq 0$

$$|adjA| \neq 0 \Rightarrow \exists (adjA)^{-1} = B \Rightarrow adjA \cdot B = I \Rightarrow \begin{cases} A(adjA \cdot B) = A \\ (A adjA) \cdot B = |A|I \cdot B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 0 \Rightarrow adjA = 0 \Rightarrow |adjA| = 0$$

תרגיל:

א. נתונה הדטרמיננטה : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & l \end{vmatrix} = 2$. מצאו למה שווה הדטרמיננטה:

$$\begin{vmatrix} l-4c & f & 2l+f \\ m-4a & d & 2m+d \\ n-4b & e & 2n+e \end{vmatrix} = ?$$

ב. הוכיחו או הפריכו: אם A היא מטריצה שאיבריה מספרים שלמים וגם האיברים של A^{-1} הם שלמים, אז $|A|^{2000} = 1$.

פתרון:

$$\begin{vmatrix} l-4c & f & 2l+f \\ m-4a & d & 2m+d \\ n-4b & e & 2n+e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l-4c & f & 2l \\ m-4a & d & 2m \\ n-4b & e & 2n \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} l-4c & f & l \\ m-4a & d & m \\ n-4b & e & n \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -4c & f & l \\ -4a & d & m \\ -4b & e & n \end{vmatrix} = .a$$

$$= -8 \begin{vmatrix} c & f & l \\ a & d & m \\ b & e & n \end{vmatrix} = -8(-1)^2 \begin{vmatrix} a & d & m \\ b & e & n \\ c & f & l \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & l \end{vmatrix} = -16$$

ב. אם איברי המטריצה שלמים, אזי גם הדטרמיננטה שלה שלמה (הרי היא סכום של מכפלות של שלמים). באופן דומה, גם הדטרמיננטה של ההופכית הינה שלמה.
 $1 = |I| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$. המספרים השלמים היחידים שכפולתם הינה אחד הם ± 1 ולכן $|A| = \pm 1$, ומתקיים תמיד ש $(\pm 1)^{2000} = 1$

שאלה:

תהי A מטריצה ששורותיה תלויות לינארית

a. הוכח/הפוך: כל מינור של המטריצה מקיים $|A_{ij}| = 0$

b. תהי A אנטי סימטרית כך ש $|A-I| = 2$ חשב את $|A^2 + 2A + I|$

פתרון:

a. הפרכה: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $|A_{11}| = 2 \neq 0$

b. $|A^2 + 2A + I| = |(A^2 + 2A + I)^t| = |A^2 - 2A + I| = |(A-I)^2| = |A-I|^2 = 4$

משפט קרמר:

נתונה מערכת משוואות $Ax=b$ עבור מטריצה ריבועית A מסדר n אשר הדטרמיננטה שלה איננה מתאפסת. אזי אוסף הפתרונות x_1, \dots, x_n של המערכת מקיימים $x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \forall i = 1, \dots, n$ כאשר A_i מתקבלת ע"י מחיקת העמודה ה- i ב- A והצבת b במקומה.

דוגמא:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow y = -2, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow z = 2$$

תרגיל 10.3 (עמוד 79):

$$\begin{cases} x - 2y + z + w = 1 \\ x - y + 5z - w = 5 \end{cases} \text{ פתרו בעזרת נוסחת קרמר את המערכת הבאה:}$$

פתרון:

$$\begin{cases} x - 2y + z + w = 1 \\ x - y + 5z - w = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 - w - z \\ x - y = 5 + w - 5z \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 - w - z & -2 \\ 5 + w - 5z & -1 \end{vmatrix} = 3w + 11z + 9 \Rightarrow x = 3w + 11z + 9$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 - w - z \\ 1 & 5 + w - 5z \end{vmatrix} = 4 + 2w - 4z \Rightarrow y = 4 + 2w - 4z$$