תרגיל 5

להגשה עד 21.12.16

שאלה 1

תהי m מידת לבג על הקטע $[0,1]$. נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subseteq [0,1]$ הינה קבוצה מדידה לבג.
תהי B קבוצת כל ה־x־ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n.
הוכיחו כי:

1. B מדידה לבג.
2. אם $m(A_n) > \delta > 0$ לכל n, אזי $m(B) > 0$.
3. אם $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ אזי $m(B) = 0$.
4. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$ ו־ $m(B) = 0$.

שאלה 2

נגדיר $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ באופן הבא:

$$F(x) := \begin{cases} 13 & x \geq 4 \\ 2(x+1) & 0 \leq x < 4 \\ e^x & x < 0 \end{cases}.$$

1. חשבו את מידת סטילטיס ביחס ל F של הקבוצות הבאות:
   (א) $I_1 = (3,\infty)$.
   (ב) $I_2 = \left(\frac{1}{4}, 2\right)$.
   (ג) $I_3 = [-1, 0]$.
2. הוכיחו כי תת קבוצה $A \subseteq (-\infty, 0)$ הינה מדידה μ_F אםם היא מדידה לבג.

תרגיל 3

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים.
הוכיחו כי אם $f\colon X \to Y$ רציפה אזי f פונקציה בורלית (כלומר, מדידה־$(\mathbb{B}(X), \mathbb{B}(Y))$).

שאלה 4

יהי $(X, \mathbb{A})$ מרחב מדיד, באשר $\mathbb{A} = \mathbb{P}(X)$. מהן הפונקציות $f\colon X \to \mathbb{R}$ המדידות־$\mathbb{A}$?

שאלה 5

יהי $(X, \mathbb{A})$ מרחב מדיד, ולכל $i \in \{1, 2, 3\}$ תהי $f_i \colon X \to \mathbb{R}$ פונקציה מדידה־$\mathbb{A}$.
לכל $x \in X$, נתבונן במשוואה:

$$g_x(t) := f_1(x)t^2 + f_2(x)t + f_3(x) = 0$$

זוהי למעשה משוואה ריבועית עם משתנה t.
הוכיחו כי קבוצת כל ה־x־ים עבורם לפונקציה g_x יש שני שורשים שונים הינה מדידה־$\mathbb{A}$, כלומר:

$$\{x \in X \mid \exists t_1, t_2 : \ t_1 \neq t_2 \ \text{ and } \ g_x(t_1) = g_x(t_2) = 0\} \in \mathbb{A} \, .$$

שאלה 6

יהי $(X, \mathbb{A})$ מרחב מדיד, ויהיו $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ פונקציות מדידות־$\mathbb{A}$. הראו כי הפונקציה:

$$h(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \mathbf{1}_{[g \neq 0]}(x)$$

הינה מדידה־$\mathbb{A}$.

שאלה 7

הוכיחו או הפריכו:

1. אם $|f|$ מדידה אזי f מדידה.
2. אם f^3 מדידה אזי f מדידה.

בהנאה :)