תרגיל 5

16 באפריל 2019

1. עבור כל אחת מהמשוואות הבאות $\mathbb{R}^3$, קבעו מתי קבוצת הפתרונות שלה היא משטח ומשטח ציירו אותן. עבור הקבוצות שמהוות משטח - קבעו את המימד. נמקו תשובתכם.

   (א) פרבולואיד: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

   (ב) היפרבולואיד חד יריעתי $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

   (ג) היפרבולואיד דו־יריעתי $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

   (ד) חרוט אליפטי: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$.

   (ה) פרבולואיד היפרבולי $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

   (ו) אליפסויד: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

   (ז) גליל אליפטי: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (שימו לב שמדובר בתת־קבוצה של $\mathbb{R}^3$).

   (ח) גליל היפרבולי $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. (שימו לב שמדובר בתת־קבוצה של $\mathbb{R}^3$).

   (ט) גליל פרבולי $x^2 = 2py$ ($p > 0$). (שימו לב שמדובר בתת־קבוצה של $\mathbb{R}^3$).

הערה: על מנת לצייר ניתן להשתמש בכל תוכנת מחשב (כגון מאטלאב) או אתר שמצייר תמונת תלת מיידיות. ניתן למצוא רבים כאלה ברחבי גוגל. לוולפראם מטרת הציור היא לשפר קצת אינטואיציה גאומטרית. לאילו שמתעקשים לצייר בלי כלי עזר - ניתן להשתמש בשיטת "קווי גובה". קובעים אחת המשתנים (בד"כ z יעבוד), ומסתכלים כיצד העקום נראה במישור $z = c$. (כמובן, במקום z יכול להופיע x או y).

2. נניח ש $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ עבור $m < n$, ונניח שקיימת $x \in \mathbb{R}^n$ כך ש

$$\mathbf{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} < m.$$

הוכיחו או הפריכו:

$$Z_F = \{x | F(x) = 0\}$$

אינה משטח.

3. תהי S קבוצת הפתרונות של $z=\sqrt{x^2+y^2}$. תהי U סביבה פתוחה של $(0,0,0)$ ב S.

(א) הראו שלכל פונקציה $\phi:\mathbb{R}^2\to U$ חח"ע, על ורגולרית (ז"א גזירה ברציפות ובעלת מטריצת יעקובי מדרגה מקסימלית, כלמר 2 במקרה שלנו), כך ש

$$\phi(u,v)=(\phi_1(u,v),\phi_2(u,v),\phi_3(u,v))=(x,y,z),$$

הפונקציה $\phi_3(u,v)$ אינה חד־חד־ערכית.

(ב) בטאו את ϕ_3 בעזרת ϕ_1 ו ϕ_2.

(ג) הראו שלא קיימת פונקציה $\phi:\mathbb{R}^2\to U$ חח"ע, על ורגולרית ולכן S אינו משטח. (הדרכה, השמשו בקשר שמצאתם בסעיף הקודם, על מנת להראות שאם $\phi(u,v)=(0,0,0)$ אזי ϕ אינה דיפרנציאבילית ב (u,v)).

(ד) הראו ש $S\setminus\{(0,0,0)\}$ משטח 2־מימדי ב $\mathbb{R}^3$.

4. הראו שהקבוצת הפתרונות של המשוואה $x=|y|$ אינה משטח ב $\mathbb{R}^2$.

5. יהי $M_n(\mathbb{R})$ מרחב המטריצות $n\times n$ מעל $\mathbb{R}$, המזוהה עם מרחב וקטורי $\mathbb{R}^{n^2}$.

(א) נסמן: $GL_n(\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R})\,|\,\det A\neq 0\}$. האם $GL_n(\mathbb{R})$ הוא משטח? במידה וכן ־ מצאו את המימד שלו.

(ב) הראו שאם $A\in M_n(\mathbb{R})$, אזי קיים ל A מינור הפיך.

(ג) תהי $A\in\mathbb{R}^n$. נסמן

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

הראו שלכל $1\leq i,j\leq n$ מתקיים

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij}+t & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\det A+(-1)^{i+j}\,t\det A_{ij}$$

כאשר A_{ij} היא המטריצה שמתקבלת מ A על ידי מחיקת שורה i ועמודה ה j ובעזרת התוצה הזאת חשבו את הנגזתר החלקית

$$\frac{\partial\det A}{\partial x_{ij}}.$$

(ד) נסמן: $SL_n(\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R})\,|\,\det A=1\}$. האם $SL_n(\mathbb{R})$ הוא משטח? במדיה וכן ־ מצאו את מימדו.