

אלגברה לינארית 2, מדעי המחשב, סמסטר קיץ תשעט, מועד א'

מרצה: תמר בר-און.
מתרגל: אריאל ויצמן.
ענו כל השאלות.
משקל כל שאלה: 27 נקודות.
בשאלות חישוביות, יש להראות במפורש את כל החישובים.
חומר עזר: מחשבון פשוט.
בהצלחה!

1. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. לכסנו את A^4 . כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך $P^{-1}A^4P = D$.
פתרון:
ראשית, נלכסן את A .

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \text{ לכן } (x-1)(x-2)(x+2) \text{ הוא } A \text{ של } A$$

נמצא ו"ע.

$$V_1 = N \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$V_2 = N \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$V_{-2} = N \left(\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \right) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

לכן אם נסמן $P' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ נקבל $P'^{-1}AP' = D'$. נעלה ברביעית את

$$D = D'^4 = (P'^{-1}AP')^4 = P'^{-1}A^4P' \text{ ונקבל } D^4 = (P'^{-1}AP')^4 = P'^{-1}A^4P' \text{ לסיכום, נקח } D = D'^4 = P'^{-1}A^4P'$$

$$P = P' \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 16 & \\ & & 16 \end{pmatrix}$$

2. נגדיר מכפלה פנימית חדשה על \mathbb{R}^2 :

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

. בנוסף, נסמן ב- $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ את המכפלה הפנימית הסטנדרטית על \mathbb{R}^2 . כלומר,

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_S = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

. נגדיר $T : (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_S)$, כלומר, מ- \mathbb{R}^2 עם המכפלה הפנימית החדשה, ל- \mathbb{R}^2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x \end{pmatrix}$$

. חשבו במפורש את T^* . האם T העתקה נורמלית?
פתרון :

ראשית, נמצא בסיס או- B ל- \mathbb{R}^2 עפ"י המ"פ החדשה.

נפעיל גראם שמידט על $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולבסוף ננרמל : (נשים לב שהוקטורים כבר מנורמלים)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כעת נייצג את T לפי בסיסים או- B .

$$[T]_S^B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

לפי משפט מההרצאה,

$$[T^*]_B^S = \left([T]_S^B \right)^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[T^*]_S^S = [I]_S^B [T^*]_B^S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ לכן} \\ \text{כלומר,}$$

$$T^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x - 5y \\ 5x + 2y \end{pmatrix}$$

לבסוף, בשביל לבדוק אם T נורמלית צריך לבדוק אם $TT^* = T^*T$
 חישוב פשוט מראה כי

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן T נורמלית.

3. יהי V ממ"פ, $T : V \rightarrow V$ העתקה צל"ע, ו $W \leq V$ תת מרחב $-T$ אינוואריאנטי. (כלומר, לכל $w \in W$, $T(w) \in W$). הוכיחו או הפריכו: W^\perp הוא $-T$ אינוואריאנטי. פתרון: יהי $v \in W^\perp$ ו $w \in W$. $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*w \rangle = \langle v, Tw \rangle = 0$. מכיון ש $Tw \in W$ לכן לכל $v \in W^\perp$, $Tv \in W^\perp$. כלומר, $-T$ אינוואריאנטי.

4. תהי $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ מטריצה בעלת 4 ע"ע: $\pm i$ ו ± 1 . חשבו את A^4 . פתרון:

A מגודל 4×4 וכן יש לה 4 ע"ע שונים, לכן היא לכסינה. בנוסף, למטריצה האלכסונית שדומה לה יש את אותם ע"ע, ואילו איברי האלכסון. לכן קיימת P הפיכה כך ש $A = PIP^{-1}$. נעלה את המשוואה ברביעית ונקבל $A^4 = PIP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix} P^{-1}$. I .