

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 4: משוואות אויילר לגראנג'

1. שטח פנים מינימלי. נניח שיוצרים משטח על ידי סבוב של עקום המחבר שתי נקודות במישור xy סביב ציר y . מצאו את העקום עבורו שטח הפנים של המשטח מינימלי.

2. The brachistochrone problem בשאלה זו נוודא כי זמן הנסיעה מנקודה (x_1, y_1) לנקודה (x_2, y_2) לאורך ישר המחבר את שתי הנקודות, $t_{1,2}^{lin}$, ארוך מזמן הנסיעה בין שתי הנקודות לאורך ציקלואידה, $t_{1,2}^{cyc}$.
(נניח כי התנועה מתרחשת בין הראשית למינימום של הציקלואידה)
 $(x(\phi) = -a(\phi - \sin \phi), y(\phi) = a(1 - \cos \phi), a < 0$

(א) חשבו את $t_{1,2}^{lin}$ משיקולי קינמטיקה

(ב) הניחו פרמטריזציה $\phi(t) = \{0 \leq t \leq t_{1,2}^{cyc}; \phi(0) = 0, \phi(t_{1,2}^{cyc}) = \pi\}$
וחשבו את $t_{1,2}^{cyc} = \int_1^2 ds/v$

(ג) הראו כי $t_{1,2}^{lin}/t_{1,2}^{cyc} = \sqrt{1 + 4/\pi^2}$

3. הראו כי $t_{1,2}^{cyc}$ כאשר נוסעים מנקודה (x_1, y_1) למינימום של הציקלואידה $(-\pi a, 2a)$ קבוע לכל בחירה של נקודת התחלה (x_1, y_1)
(רמז: קבלו את האינטגרל $\int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{\cos \phi_0 - \cos \phi}} d\phi$, כאשר ϕ_0 הזוית בנקודת ההתחלה, והראו כי הוא שווה ל π).