חורף תשע"ד

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 5: אנליטיות. פונקציות הרמוניות

1. נתונה הפונקציה $f(z)=xy+i(x^2+y^2)$.

(א) הראו כי f אינה אנליטית באף נקודה

נראה כי $v=x^2+y^2$ אינה הרמונית באף נקודה.

אכן $v_{xx}+v_{yy}=2+2\neq 0$

(ב) הראו כי f גזירה בראשית

נבדוק קיום של $C.R$ בראשית

$u_x=y,\ u_y=x,\ v_x=2x,\ v_y=2y$

ולכן $u_x(0,0)=v_y(0,0)=0$ ו $u_y(0,0)=-v_x(0,0)=0$.

(ג) הראו מפורשות כי f אינה גזירה באף נקודה $z\neq 0$

נרשום $f(z)=\Re(z)\Im(z)+i|z|^2$ ונראה לפי הגדרת הגבול כי $f'(z)$ לא קיימת לכל $z\neq 0$. נתבונן בגבול

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Re(z+\Delta z)\Im(z+\Delta z)+i|z+\Delta z|^2-\Re(z)\Im(z)-i|z|^2}{\Delta z}$$

ניקח $\Delta y=0$ ונרשום את הגבול המתאים עבור החלק המדומה

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|^2-|z|^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\overline{z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\overline{\Delta z}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\overline{z}+z\frac{\Delta x}{\Delta x}+\Delta x\right)=\overline{z}+z=2\Re(z)$$

כעת ניקח $\Delta x=0$ ונקבל

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|^2-i|z|^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\overline{z}+z\frac{-i\Delta y}{i\Delta y}-i\Delta y\right)=\overline{z}-z=-2i\Im(z)$$

נשים לב כי למרות ש f גזירה בראשית, היא אינה גזירה באף סביבה של הראשית ולכן אינה אנליטית גם שם

משפט:

$z_n \to z_0$ אםם $\Re(z_n) \to \Re(z_0)$; $\Im(z_n) \to \Im(z_0)$.

הוכחה:

כוון א: נניח כי $z_n \to z_0$ כלומר
$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0|^2 = \lim_{n\to\infty} |\Re(z_n) - \Re(z_0) + i(\Im(z_n) - \Im(z_0))|^2 = \lim_{n\to\infty}(\Re(z_n) - \Re(z_0))^2 + \lim_{n\to\infty}(\Im(z_n) - \Im(z_0))^2 = 0$

ולכן $\lim_{n\to\infty} \Re(z_n) = \Re(z_0),\ \lim_{n\to\infty} \Im(z_n) = \Im(z_0)$.

כוון ב: נניח כי $\Re(z_n) \to \Re(z_0)$; $\Im(z_n) \to \Im(z_0)$, כלומר

$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| \le \lim_{n\to\infty} |\Re(z_n) - \Re(z_0)| + \lim_{n\to\infty} |\Im(z_n) - \Im(z_0)| = 0$, ולכן $\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$.

2. הראו כי $\lim_{n\to\infty} z_n$ כאשר $z_n = i^n$ לא קיים.

נרשום $z_n = \mathrm{cis}\frac{n\pi}{2}$ ולכן $|z_n| = 1$, $\arg(z_n) = \frac{n\pi}{2}\mathrm{mod}(2\pi)$.

כעת, $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$ ואילו $\lim_{n\to\infty} \arg(z_n)$ לא קיים. על כן, $\lim_{n\to\infty} z_n$ לא קיים.

3. בדקו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n/2^n$ מתכנס.

נבדוק התכנסות בהחלט:

$\sum_{n=1}^{\infty} |(1+i)^n/2^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}^n/2^n = \sum_{n=1}^{\infty}(1/\sqrt{2})^n < \infty$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n/2^n < \infty$.

4. הוכיחו כי לכל $|z| < 1$ הטור הגאומטרי $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ מתכנס וסכומו $1/(1-z)$.

נרשום את סדרת הסכומים החלקיים

$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = (z^{n+1} - 1)/(z - 1)$. כעת

$\lim_{n\to\infty} s_n = (\lim_{n\to\infty} z^{n+1} - 1)/(z - 1)$.

נשאר להראות כי $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$. באמת, $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0$ לכל $|z| < 1$ וסיימנו.