

## תרגיל 8 מבוא לתורת החבורות

**שאלה 8.1** תהי  $G$  חבורה. תהי  $H \leq G$  תת חבורה ו  $N_1, N_2 \triangleleft G$  תתי חבורות נורמליות. בנוסף נניח כי

$$N_1 \cap H = N_2 \cap H$$

הוכיחו כי

$$HN_1/N_1 \simeq HN_2/H_2$$

**שאלה 8.2** תהי  $G$  חבורה ו  $H \triangleleft G$  תת חבורה נורמלית מאינדקס  $p$  ראשוני. כלומר  $[G : H] = p$ . יהי  $K \leq G$  תת חבורה נוספת כך ש  $K \not\subseteq H$ . הוכיחו כי  $KH = G$  ו  $[K : K \cap H] = p$ .

**שאלה 8.3** תהי  $G$  חבורה ו  $H, K \leq G$  שתי תתי חבורות. הוכיחו כי:

1.  $HK = KH$  היא תת חבורה אם ורק אם  $HK = KH$ .  
רמז: עבור אחד הכיוונים מומלץ להשתמש בעובדה הבאה. לכל תת קבוצה  $A \subseteq G$  אפשר לסמן את קבוצת ההופכיים

$$A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$$

אם  $H$  תת חבורה אז בפרט  $H^{-1} = H$   
[הערה: מהטענה הזאת אפשר להסיק בקלות מה שהוכחתם בהרצאה, שאם  $K$  נורמלית אז  $HK$  תת חבורה]

2. אם  $H$  ו  $K$  תתי חבורות נורמליות אז  $HK$  גם כן תת חבורה נורמלית.