פתרונות (2)

1. תהי $f_n : X \to \mathbb{R}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות כך ש $f_n \to f$ במידה שווה. הראו כי אם $\mu(X) < \infty$ אזי f אינטגרבילית וגם $\int f_n \to \int f$.

פתרון: מכיוון שההתכנסות הינה במידה שווה, נובע כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 גדול מספיק עבורו $|f - f_n| < \varepsilon$ לכל x ולכל $n > n_0$. נסמן $h_n = f - f_n$ מכאן שעפ"י משפט ההתכנסות החסומה נובע כי f אינטגרבילית וגם $\lim_{n\to\infty} \int h_n = \lim_{n\to\infty} \int f - f_n = 0 \Rightarrow \int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

2. אם f_n הינה סדרה של פונקציות אי-שליליות ואינגרביליות כך ש $f_n \downarrow f$, הראו כי $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

פתרון: עפ"י למת פאטו נובע כי $\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

מצד שני, עפ"י למת פאטו ההפוכה, נובע כי $\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

לסיכום, קיבלנו $\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$, ומכאן ש $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$

3. יהיו $f, f_n : X \to [0,\infty]$ פונקציות מדידות כך ש $f_n \to f$ כב"מ ו $f \ge f_n$ לכל n . הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

פתרון:

נגדיר סדרה חדשה $h_n = f - (f - f_n)$ ונשים לב כי היא חיובית שכן $f \ge f_n$ עפ"י הנתון. כעת, עפ"י למת פאטו נובע כי

$$\int \underline{\lim} h_n = \int \underline{\lim}\left[f - \left(f - f_n \right) \right] = \int \underline{\lim} f_n =$$
$$= \int f \le \underline{\lim} \int h_n = \underline{\lim} \int f - \left(f - f_n \right) = \underline{\lim} \int f_n$$

מצד שני , מכיוון ש $f \ge f_n$ נובע ממונוטוניות האינטגרל כי $\int f \ge \int f_n$ ולכן גם $\int f \ge \overline{\lim} \int f_n$. בסופו של דבר קיבלנו כי $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

4. תהי $f \ge 0$ פונקציה מדידה לבג כך ש $\int fdm = \infty$. הראו שלכל $M > 0$ קיימת פונקציה g כך ש $0 \le g \le f$ המקיימת :

   i. $\int gdm > M$

   ii. g חסומה

   iii. לתומך של g מידה סופית.

פתרון: נסתכל על הפונקציה $g_n(x) = 1_{[-n,n]\cap\{f \le n\}}(x) f(x)$. קל לראות כי לכל $n \in \mathbb{N}$ g_n מקיימת את שני הסעיפים האחרונים. הסעיף הראשון נובע מההתכנסות המונוטונית.

5. נניח כי (X, S, μ) הינו ממ"ח ותהי סדרה f_n של פונקציות אינטגרביליות אי שליליות כך ש $f_n \to f$ כב"מ וגם $\int_X f_n d\mu \to \int_X f\, d\mu$. הראו כי לכל $E \in S$ מתקיים $\int_E f_n d\mu \to \int_E fd\mu$.

פתרון: מכיוון ש f_n אי שליליים, נובע כי $f_n \ge |f_n 1_E|$. ברור כי $f1_E,\ f_n 1_E$ אינטגרביליות ומתקיים ש $f_n 1_E \to f1_E$. ומכאן שכל התנאים למשפט ההתכנסות הנשלטת המוכלל מתקיימים ולכן $\int_E f_n d\mu \to \int_E fd\mu$.

6. תהי X קבוצה מדידה עם מידה סופית ותהי $f \in L^1(X, \mu)$ (אינטגרבילית ביחס ל μ) אי שלילית. הראו ש $\lim_{\alpha\to 1-} \int_X f^\alpha d\mu = \int_X fd\mu$. האם התוצאה נכונה גם עבור $\alpha \to 1+$?

פתרון: נגדיר $A = \{x : f(x) > 1\}$. אזי, מכיוון ש $0 < \alpha < 1$ נובע כי $f^\alpha(x) \uparrow f(x)$ כאשר $\alpha \to 1$. כמו כן, על A^c נובע כי f^α נשלטת ע"י הפונקציה 1_{A^c} אשר אינטגרבילית כיוון שהמידה

הינה סופית. מכאן שעפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג ומשפט ההתכנסות הנשלטת נובע

כי $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{\alpha \to 1-} \int\limits_X f^\alpha d\mu = \lim\limits_{\alpha \to 1-} \left(\int\limits_{A^c} f^\alpha d\mu + \int\limits_A f^\alpha d\mu \right)$.

7. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית, $a \in \mathbb{R}$ ונגדיר עבור $x > a$

$$F(x) = \int\limits_{[a,x]} f dm$$

הראו כי F רציפה.

פתרון: ניקח סדרה $a < x_n$ כך ש $x_n \to x$. נגדיר $h_n = f 1_{[a, x_n]}$ וברור כי $h_n \to f 1_{[a,x]}$. כעת, מכיוון שהסדרה x_n מתכנסת נובע כי מ n מסויים $x_n < M$, כאשר $x < M \in \mathbb{R}$. נשים לב כי $|h_n| \le |f| 1_{[a,M]}$ וכן $|f| 1_{[a,M]}$ אינטגרבילית. מכאן שכל התנאים להתכנסות הנשלטת מתקיימים ולכן $F(x) = \int\limits_{[a,x]} f dm = \lim\limits_{n \to \infty} \int h_n dm = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{[a, x_n]} f dm = \lim\limits_{n \to \infty} F(x_n)$

8. יהי (X, S, μ) ממ"ח סיגמא סופי. נניח ו f הינה אינטגרבילית ואי שלילית. הוכיחו כי אם $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $A \in S$ כך ש $\mu(A) < \infty$ ומתקיים

$$\int f > \int\limits_A f + \varepsilon .$$

פתרון: מכיוון ש (X, S, μ) הינו ממ"ח סיגמא סופי, נובע כי קיימת סדרה של קבוצות $A_n \in S$ כך ש $\mu(A_n) < \infty$ וגם $X = \bigcup\limits_n A_n$. ללא הגבלת הכלליות נניח כי A_n זרות. נסמן $E_k = \bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n$ איחוד סופי של קבוצות ונסמן $f_n = f 1_{E_n}$, הצימצום של f על E_n . מכיוון ש $X = \bigcup\limits_k E_k$ נובע כי $f_n \to f$, מכיוון ש f אי שלילית נובע כי $f_n \uparrow f$. נשתמש במשפט ההתכנסות המונוטונית של לבג להסיק ש $\int f = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{E_n} f = \lim\limits_{n \to \infty} \int f 1_{E_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \int f_n$. מכיוון ש $f \ge f_n$ נובע כי

$$\int\limits_{E_n} f \le \int f$$

ומכאן ש $\int\limits_{E_n} f \uparrow \int f$. קל לראות כי $\mu(E_k) < \infty$ לכל k וכי מהגדרת הגבול נובע כי $\int f > \int\limits_{E_k} f + \varepsilon$ עבור k מספיק גדול.

9. תהי $\phi(x)$ פונקציה המקיימת $\phi(x)=\phi(x+1)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ובנוסף $\int\limits_{[0,1]}\phi(x)\,dx<\infty$. נגדיר

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(nx)}{n^2}$$

הראו ש f סופית כמעט בכל מקום.

פתרון: קל לראות כי $f(x)$ מחזורית 1, כלומר $f(x+1)=f(x)$. מכאן שמספיק להראות כי f סופית כב"מ על הקטע $[0,1]$. נשים לב כי

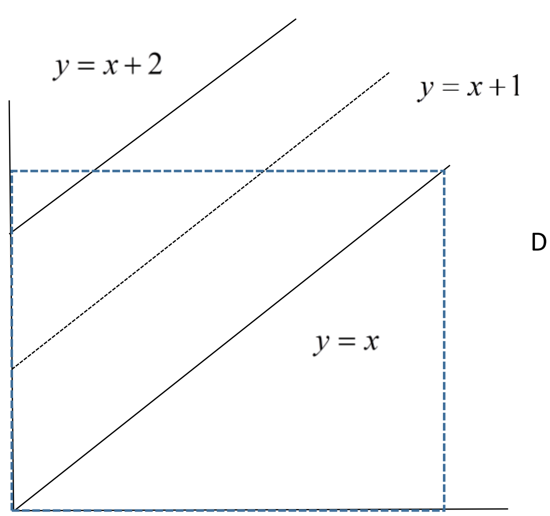
$$\int\limits_{[0,1]} f(x)dm=\int\limits_{[0,1]}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(nx)}{n^2}dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{[0,1]}\frac{\phi(nx)}{n^2}dm$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{[0,n]}\frac{\phi(x)}{n^3}dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{[0,1]}\frac{\phi(x)}{n^2}dm<\infty$$

מכאן נובע כי f סופית כב"מ.

10. יהי $X=Y=\mathbb{R}$ ונסתכל על $\mathbb{R}^2$ ביחס לסיגמא אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & x\geq 0 \text{ and } x\leq y<x+1\\ -1 & x\geq 0 \text{ and } x+1\leq y<x+2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

הראו כי $\int\int f(x,y)m(dx)m(dy)\neq\int\int f(x,y)m(dy)m(dx)$. מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?



נחשב

$$h(y)=\int f(x,y)m(dx)=\begin{cases}0 & y<0\\ \int_0^y 1dm=y & 0\le y<1\\ \int_0^{y-1}-1dm+\int_{y-1}^{y}1dm=2-y & 1\le y<2\\ \int_{y-2}^{y-1}-1dm+\int_{y-1}^{y}1dm=0 & 2\le y<\infty\end{cases}$$

ולכן

$$\int\int f(x,y)m(dx)m(dy)=\int_{-\infty}^{\infty}h(y)dm=\int_0^1 ym(dy)+\int_1^2(2-y)m(dy)=1$$

מצד שני,

$$g(x)=\int f(x,y)m(dy)=\begin{cases}0 & x<0\\ \int_x^{x+1}1m(dy)+\int_{x+1}^{x+2}-1m(dy)=0 & x\ge 0\end{cases}$$

ולכן

$$\int\int f(x,y)m(dy)m(dx)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dm=\int_{-\infty}^{\infty}0dm=0$$

ומכאן ש

$$1=\int\int f(x,y)m(dx)m(dy)\neq\int\int f(x,y)m(dy)m(dx)=0.$$

על מנת להראות כי אין סתירה למשפט פוביני, נראה כי $\int_{\mathbb{R}^2}\left|f(x,y)\right|dm\times dm=\infty$. נחשב את $\int_D\left|f(x,y)\right|dm\times dm$ כאשר D_x הינו הריבוע בציור שצלעו באורך x . ברור כי אינטגרל כפול על הפונקציה הינו השטח של הריבוע D_x פחות שני המשולשים. כלומר, אם גודל הריבוע הוא x^2 אזי

$2x-2=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{(x-2)^2}{2}\right)-x^2=\int_{D_x}|f(x,y)|dm\times dm$. עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית

נובע כי $\infty=2x-2 \lim_{x\to\infty}=\int_{D_x}|f(x,y)|dm\times dm \lim_{x\to\infty}=\int_{\mathbb{R}^2}|f(x,y)|dm\times dm$. מכאן כי תנאי

משפט פוביני אינם מתקיימים ולכן אין סתירה.

11. נניח ו μ הינה מידה סופית . הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית הינה אינטגרבילית אמ"מ

$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x: f(x)\geq n\})<\infty$.

פתרון:

$\Leftarrow$: אם f אינטגרבילית. נרשום

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x: f(x)\geq n\})=\sum_{n=1}^{\infty}\int 1_{(\{x:f(x)\geq n\})}d\mu=\int\sum_{n=1}^{\infty}1_{\{x:f(x)\geq n\}}d\mu$$
$$=\int\sum_{n=1}^{\infty}n_{\{x:n+1>f(x)\geq n\}}d\mu$$
.

הפונקציה $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n_{\{x:n+1>f(x)\geq n\}}$ הינה למעשה $\lfloor f(x)\rfloor$ פונקצית פלור, השלם הגדול ביותר

מכל השלמים שקטנים מהערך $f(x)$. כך שלמעשה הפונקציה $g(x)$ נשלטת ע"י הפונקציה

$f(x)$ ולכן אינטגרבילית.

$\Rightarrow$: אם הטור מתכנס. אזי נוסיף את פונקצית האינדיקטור ונקבל כי $f(x)\leq g(x)+1$. כמו כן ,

$g(x)+1$ אינטגרבילית כי המידה הינה סופית ולכן גם f אינטגרבילית.

12. **<u>הגדרה:</u>** נסמן $C_0=[0,1]$, ולכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר את C_{n+1} להיות C_n לאחר שמורידים מכל

קטע בו את השליש האמצעי (הפתוח) ע"י הנוסחה $C_{n+1}=\frac{C_n}{3}\cup\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)$. קבוצת קנטור

מוגדרת כחיתוך של כל ה- C_n : $C:=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n$. (כל C_n הוא איחוד של 2^n קטעים סגורים

שאורכם $\frac{1}{3^n}$.

א. יהי $x\in[0,1]$, אם נציג את x בבסיס טרנארי (3) $x=0.x_1x_2x_3...$ (כלומר $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}$) אזי נקבל כי $x\in C \Leftrightarrow$ לכל $n\in\mathbb{N}$, הספרה ה-nית של x $x_n\equiv d_n(x)\equiv x$ היא 0 או 2.

ב. C אינה בת-מנייה.

ג. $m(C)=0$

ד. C אינה איחוד בן-מנייה של קטעים סגורים.

<u>הוכחה:</u>

א. נוכיח $x\in C_n \Leftrightarrow x_1,x_2,...,x_n\in\{0,2\}$ באינדוקציה:

המקרה $n=1$:

$$x\in C_1 \Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]\Leftrightarrow x_1=0 \text{ or } x_1=2 \Leftrightarrow x_1\in\{0,2\}$$

נניח את נכונות הטענה עבור n כלשהו ונוכיח את נכונותה עבור $n+1$:

$(\Rightarrow)$

$$x\in C_{n+1}=\frac{C_n}{3}\cup\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)\Rightarrow x\in\frac{C_n}{3} \text{ or } x\in\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)\Rightarrow 3x\in C_n \text{ or } 3x-2\in C_n$$

ע"פ הנחת האינדוקציה, $d_n(3x)\in\{0,2\}$ או $d_n(3x-2)\in\{0,2\}$. אבל - $d_n(3x-2)=d_n(3x)=d_{n+1}(x)=x_{n+1}$. מספיק לשים לב כי $C_{n+1}\subseteq C_n$ כדי לראות שהטענה נכונה.

$(\Leftarrow)$

ידוע כי $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}\in\{0,2\}$ ולכן ע"פ הנחת האינדוקציה $x\in C_n$. יש להוכיח כי $x\in C_{n+1}=\frac{C_n}{3}\cup\left(\frac{C_n}{3}+\frac{2}{3}\right)$, כלומר $3x\in C_n$ או $3x-2\in C_n$. ובכן:

אם $x_1=0$ נקבל $3x=0.x_2x_3...x_nx_{n+1}...\in C_n$,

ואם $x_1=2$ נקבל $3x-2=0.x_2x_3...x_nx_{n+1}...\in C_n$.

סיימנו את האינדוקציה. סה"כ $x\in C\Leftrightarrow x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}(x\in C_n)\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}(x_n\in\{0,2\})$

מש"ל.

ב. עפ"י סעיף ב' יש התאמה בין סדרות של 0 ו 2 וקבוצת קנטור. כמו כן, יש התאמה בין סדרות של 0 ו 1 ל $\mathbb{R}$ ...

ג. לכל $N\in\mathbb{N}$, $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n\subseteq C_N$ וע"פ מונוטוניות $0\le m(C)\le m(C_N)=2^N\frac{1}{3^N}$. נשאיף $N\to\infty$ לקבל את הדרוש.

ד. נניח בשלילה כי $C=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ כאשר I_n קטעים סגורים. אזי כבר ראינו כי $m(I_n)=0$ ולכן בהכרח $I_n=\{x_n\}$, כלומר הקטעים הסגורים הינם נקודונים. אבל עפ"י סעיף ג' C איננה בת מנייה ומכאן סתירה.

תזכורת: תהי X קבוצה כלשהי. $S\subseteq P(X)$ הינה σ-אלגברה של קבוצות ב X אם מתקיימים התנאים הבאים:

i. $A\in S\Rightarrow A^c\in S$.

ii. $X\in S$.

iii. $\{E_n\}\in S\Rightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in S$

13. <u>תרגיל:</u> תהי $f:(\mathbb{R},L(\mathbb{R}))\to\mathbb{R}^*$ מדידה לבג, הוכיחו את השוויון

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dm(x)=\int_0^{\infty}m(\{x:|f(x)|\ge t\})dm(t) .$$

<u>פתרון:</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{|f(x)|}1dm(t)\right]dm(x)=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}I_{\{(x,t):|f(x)|\ge t\}}dm(t)\right]dm(x)\overset{Tonelli}{=}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}I_{\{(x,t):|f(x)|\ge t\}}dm(x)\right]dm(t)=\int_0^{\infty}m(\{x:|f(x)|\ge t\})dm(t)$$

הסיבה שמשפט טונלי תקף היא כי מדובר במידות לבג $dm(x),dm(t)$ שהן שלמות ו- σ סופיות. בנוסף יש לבדוק כי הפונקציה $I_{\{(x,t):|f(x)|\ge t\}}$ מדידה במרחב המכפלה, וע"פ אחד מתרגילי הבית הכרחי ומספיק להוכיח כי ה**קבוצה** $\{(x,t):|f(x)|\ge t\}$ מדידה "$L\otimes L$" .

(נשתמש בסימון $\otimes$ לסמן את σ -אלגברת המכפלה)

ובכן יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, ההעתקה $x\mapsto\left|f(x)\right|$ מדידה (הרכבה של רציפה ומדידה), ולכן הקבוצה $\left\{x\in\mathbb{R}:\left|f(x)\right|>\alpha\right\}=:E_\alpha\in L$. ומכאן $\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:\left|f(x)\right|>\alpha\right\}=E_\alpha\times\mathbb{R}\in L\otimes L$ מלבן מדיד (שהוא קבוצה מדידה!). קיבלנו אם כן כי ההעתקה $(x,t)\mapsto\left|f(x)\right|$ מדידה $L\otimes L$.

הפונקציה $t\mapsto t$ גם כן מדידה לבג ולכן $\left\{t\in\mathbb{R}:t>\alpha\right\}=:F_\alpha\in L$, ומכאן $\left\{(x,t):t>\alpha\right\}=\mathbb{R}\times F_\alpha\in L\otimes L$. הפרש בין פונקציות מדידות הוא מדיד, ולכן $(x,t)\mapsto\left|f(x)\right|-t$ מדידה. הקבוצה שלנו היא בדיוק $\left(|f|-t\right)^{-1}\left[[0,\infty)\right]$ ולכן מדידה.

14. <u>תרגיל:</u> תהי μ מידה סופית על $\mathbb{R}$, ונגדיר $\alpha(x)=\mu\left((-\infty,x]\right)$. הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha(x+c)-\alpha(x)\right]dm(x)=c\mu(\mathbb{R})$.

פתרון:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\alpha(x+c)-\alpha(x)\right]dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mu\left((-\infty,x+c]\right)-\mu\left((-\infty,x]\right)\right]dm(x)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mu\left((x,x+c]\right)dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{(x,x+c]}d\mu(t)dm(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{\left\{(x,t):x<t\le x+c\right\}}d\mu(t)dm(x)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{\left\{(x,t):t>x\ge t-c\right\}}d\mu(t)dm(x)\overset{Tonelli}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}I_{\left\{(x,t):t>x\ge t-c\right\}}dm(x)d\mu(t)=c\int_{-\infty}^{\infty}d\mu(t)=c\mu(\mathbb{R})$$