אלגברה לינארית הרחבת הסמכה (בן גוריון), סמטסטר ב' תש"פ

מבחן לדוגמה 2

מרצה: אחיה בר-און.
מתרגל: ד"ר דניס גלוקו.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** 4 השאלות .
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- <u>נמקו תשובתכם.</u>

.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה! ☺

.1

(א) נתונה מערכת משוואות לינאריות (מעל $\mathbb{R}$) התלויה בפרמטר k.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + kx_3 & = 1 \\ 2x_1 - (k+1)\,x_2 + 6x_3 & = 2 \\ 3x_1 - (k+3)\,x_2 + 6x_3 & = k \end{cases}$$

i. קבעו לאילו ערכי k יש למערכת הבאה פתרון יחיד, אין פתרון, או אינסוף פתרונות. נמקו כל קביעה.

פתרון: נעביר את מערכת המשוואות למטריצה ונדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 2 & -k-1 & 6 & 2 \\ 3 & -k-3 & 6 & k \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & -k+3 & 6-2k & 0 \\ 0 & -k+3 & 6-3k & k-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & -k+3 & 6-2k & 0 \\ 0 & 0 & -k & k-3 \end{array}\right)$$

כעת, אם $k \neq 3, 0$ נקבל מטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, ללא משתנים חופשיים ולכן במקרה זה יהיה פתרון יחיד.

אם $k = 3$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

שאחרי החלפת שורות $R_2 \leftrightarrow R_3$ היא בצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (x_2) ולכן במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות.

אם $k = 0$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & * & 1 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

שיש בה שורת סתירה ולכן במקרה זה אין פתרון.

ii. עבור ערכי k שלמערכת יש אינסוף פתרונות - מצאו אותם.

פתרון: ראינו שעבור $k = 3$ זה המקרה היחידי של אינסוף פתרונות. כיוון שדירוג לא משפיע על אוסף הפתרונות, נוכל להמשיך עם המטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

שהגענו אליה. נדרג לצורה קנונית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{3} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כעת, נסמן את המשתנה החופשי בפרמטר $x_2 = t$. מהמשוואה השניה נקבל $x_3 = 0$ והמשוואה הראשונה נקבל $x_1 - 2t = 1$ כלומר $x_1 = 2t + 1$ ובסה"כ קבוצת כל הפתרונות היא

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

(ב) יהא V מ"ו ויהיו W_1, W_2, W_3 ת"מ. הוכיחו/הפריכו:

i. מתקיים $W_1 + (W_2 \cap W_3) \subseteq (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$.

פתרון: הוכחה:

ניקח $v \in W_1 + (W_2 \cap W_3)$ ונראה כי $v \in (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$. לפי הגדרת סכום קיימים $w_1 \in W_1, w \in W_2 \cap W_3$ כך ש

$$v = w_1 + w$$

מכיוון ש $w \in W_2$ נקבל כי $v = w_1 + w \in W_1 + W_2$ ומכיוון ש $w \in W_3$ נקבל כי $v = w_1 + w \in W_1 + W_3$ ולכן

$$v \in (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$$

כנדרש.

ii. מתקיים $W_1 + (W_2 \cap W_3) \supseteq (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$.

פתרון: הפרכה:למשל עבור המרחב $V = \mathbb{R}^2$ ותתי המרחבים

$$W_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, W_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, W_3 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מתקיים כי

$$W_2 \cap W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן

$$W_1 + (W_2 \cap W_3) = W_1$$

ומצד שני

$$W_1 + W_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$$

(שימו לב כי $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל. ומכיוון שיש שם 2איברים כמו $\dim\mathbb{R}^2$ אז לפי השלישי חינם זה בסיס ל $\mathbb{R}^2$). באופן דומה

$$W_1+W_3=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}+\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^2$$

ולכן

$$(W_1+W_2)\cap(W_1+W_3)=\mathbb{R}^2\cap\mathbb{R}^2=\mathbb{R}^2$$

שאינו מוכל ב W_1.

.2

(א) קבעו האם המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&3\end{pmatrix}$$

הפיכה. במידה והיא הפיכה, מצאו את ההפוכית A^{-1}.
פתרון: נשתמש באלגוריתם שראינו בכיתה ונדרג את $(A|I)$. נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\2&2&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-2R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-2&-2&1&0\\0&-2&-1&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\leftarrow -\frac{1}{2}R_3]{R_2\leftarrow \frac{1}{-3}R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&1&\frac{1}{2}&1&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow -6R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-2&-2&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1\leftarrow R_1-2R_3]{R_2\leftarrow R_2-\frac{2}{3}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&5&4&-6\\0&1&0&2&1&-2\\0&0&1&-2&-2&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&2&-2\\0&1&0&2&1&-2\\0&0&1&-2&-2&3\end{array}\right)$$

ולכן A הפיכה ומתקיים

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}$$

i. (שאלה נוספת שלא קשורה למבחן, הועלתה תוך כדי שיעור חזרה) נניח $\{v_1,v_2,v_3\}$ בת"ל ב $\mathbb{R}^3$. הוכיחו כי $\{Av_1,Av_2,Av_3\}$ בת"ל ב $\mathbb{R}^3$ (המטריצה A ממקודם).
פתרון:

בשביל להראות כי הם בת"ל- ניקח צירוף לינארי ששווה אפס $\alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2 + \alpha_3 A v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ונרצה להראות שכל המקדמים שווים אפס ($\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$). לפי תכונות של כפל מטריצות נוכל לכתוב את השיוויון כ

$$A\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ומכיוון ש A הפיכה (מחישובים קודמים), נכפול ב A^{-1} משמאל ונקבל כי

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ומכיוון שנתון ש $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל נקבל כי המקדמים שווים אפס כנדרש.

(ב) תהא A מטריצה ריבועית (לא A מסעיף קודם!). הוכיחו/הפריכו:

i. אם A הפיכה אז מהשיוויון $AB = AC$ ניתן להסיק כי $B = C$ (לכל שתי מטריצות B, C).
פתרון: הוכחה: נניח כי A הפיכה.
ונניח כי מתקיים $AB = AC$ (עבור איזשהן מטריצות). נכפיל שיוויון זה ב A^{-1} (שנתון שקיימת) ונקבל $B = A^{-1}AB = A^{-1}AC = C$ כנדרש.

ii. אם A אינה הפיכה אזי ייתכן כי $AB = AC$ אבל $B \neq C$
פתרון: הוכחה: נניח כי A אינה הפיכה. מה יודעים על הפתרונות למערכת $Ax = 0$ (כלומר, מה יודעים על $\text{Null}A$)? שיש פתרון v שאינו וקטור האפס, כלומר $Av = 0$ ו $v \neq 0$ מכיוון שגם $A0 = 0$ נקבל כי

$$Av = A0$$

וגם $v \neq 0$ כנדרש (נגדיר $B = v, C = 0$).

.3

(א) מצאו לאילו ערכי $k \in \mathbb{R}$ מתקיים כי הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+2k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k & 0 \\ k-k^2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

פורשת את $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
פתרון: פירוש השאלה היא האם

$$\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+2k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k & 0 \\ k-k^2 & 2 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^{2\times 2}$$

או במילים אחרות האם עבור מטריצה כללית $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ כך ש

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1+2k \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} -k & 0 \\ k-k^2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

משיוויון רכיבי המטריצה נקבל את מערכת המשוואות הבאה (מערכת של 4 משוואות [לכל רכיב] עם 5 נעלמים $\alpha_1 - \alpha_5$):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -k & 0 & 1 & -k & a \\ 2 & 1 & 1+2k & 1 & 0 & b \\ k & 0 & 1 & 1 & k-k^2 & c \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & d \end{array}\right)$$

כלומר השאלה שלנו היא: לאילו ערכי k למערכת

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -k & 0 & 1 & -k & a \\ 2 & 1 & 1+2k & 1 & 0 & b \\ k & 0 & 1 & 1 & k-k^2 & c \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & d \end{array}\right)$$

יש תמיד פתרון (לכל a, b, c, d). זה שקול לכך שאחרי דירוג של $\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 & -k \\ 2 & 1 & 1+2k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 & 1 & k-k^2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ לא תהיה שורת אפסים. נדרג ונבדוק

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 & -k \\ 2 & 1 & 1+2k & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 & 1 & k-k^2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_3 - kR_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+2k & 1+2k & -1 & 2k \\ 0 & k^2 & 1 & 1-k & k \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & k^2 & 1 & 1-k & k \\ 0 & 1+2k & 1+2k & -1 & 2k \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - (1+2k)R_2]{R_3 \leftarrow R_3 - k^2 R_2} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 1-k-k^2 & k-2k^2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-(1+2k) & 2k-2(1+2k) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & 1-k-k^2 & k(1-2k) \\ 0 & 0 & 0 & -2(1+k) & -2(1+k) \end{pmatrix}$$

כעת עבור $k \neq \pm 1$, נקבל צורה מדורגת ללא שורת אפסים ולכן במקרה זה קבוצת המטריצות אכן פורשת את $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

עבור $k = 1$נקבל (נמשיך עוד פעולת דירוג אחת)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - \frac{1}{4}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ויש שורת אפסים ולכן קבוצת המטריצות לא פורשת את $\mathbb{R}^{2\times 2}$

עבור $k=-1$ נקבל כי

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ולכן במקרה זה קבוצת המטריצות אכן פורשת את $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

תשובה סופית: $k\neq 1$ המטריצות פורשות ועבור $k=1$ הן אינן פורשות.

(ב) יהא V מ"ו ויהיו $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס ל V. הוכיחו/הפריכו: הקבוצה $\{v_1-v_2,v_2-v_3,v_1+v_3\}$ גם בסיס של V.

פתרון: הוכחה: כיוון ש B בסיס ל V נקבל כי $\dim V=3$. כיוון שבקבוצה

$$\{v_1-v_2,v_2-v_3,v_1+v_3\}$$

יש 3 איברים (כמו $\dim V$) אזי לפי משפט השלישי חינם, מספיק להראות כי קבוצה זו בת"ל - נראה זאת. ניקח צירוף לינארי ששוה לאפס

$$\alpha_1\left(v_1-v_2\right)+\alpha_2\left(v_2-v_3\right)+\alpha_3\left(v_1+v_3\right)=0$$

ונראה כי המקדמים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כולם שווים בהכרח לאפס. אכן, נסדר את אגף שמאל מחדש ונקבל

$$\left(\alpha_1+\alpha_3\right)v_1+\left(-\alpha_1+\alpha_3\right)v_2+\left(-\alpha_2+\alpha_3\right)v_3=0$$

ומכיוון שנתון כי B בת"ל (כי היא בסיס) נקבל כי המקדמים בצירוף זה שווים לאפס. כלומר נקבל את המערכת

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_3 & =0 \\ -\alpha_1+\alpha_3 & =0 \\ -\alpha_2+\alpha_3 & =0 \end{cases}$$

נייצג את המערכת בעזרת מטריצה ונדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftarrow R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

הגענו לצורה מדורגת ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן יש רק פתרון אחד. מכיוון שאנחנו יודעים ש $\alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=0$ הוא פתרון אז זהו הפתרון היחיד וקיבלנו את המבוקש.

.4

(א) יהיו

$$W_1=\text{Null}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -7 & 9 \end{pmatrix}, W_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

שני תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$ (תזכורת: $\text{Null}A$ היא קבוצת כל הפתרונות למערכת $Ax=0$).

i. מצאו בסיס ומימד ל W_1.

פתרון: נדרג ונפתור כרגיל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 3 & -7 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו צורה מדורגת (קנונית) עם משתנה חופשי $x_3 = t$ ואז מהמשוואה השניה נקבל $x_2 = 0$ ומהמשוואה הראשונה נקבל $x_1 + 3t = 0$ כלומר $x_1 = -3t$ ולסיכום

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -3t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל W_1 והמימד שווה 1.

מסקנות נוספות שלא קשורות לסעיף הזה (בא להדגים את שאלה 2בב): המטריצה $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -7 & 9 \end{pmatrix}$ לא הפיכה (יש שורת שורת אפסים אחרי דירוג, יש משתנים חופשיים אחרי דירוג, הקנונית של שונה מ I) וגם קיבלנו כי

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ii. הציגו את W_2 ע"י משוואות.

פתרון: נבדוק מתי וקטור כללי $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in W_2$ זה קורה אמ"מ קיימים סקלרים

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

שזה שקול לכך שלמערכת

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & a \\ -2 & 2 & b \\ 1 & 0 & c \end{array}\right)$$

יש פתרון. נדרג ונבדוק שאין שורת סתירה

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & a \\ -2 & 2 & b \\ 1 & 0 & c \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & a \\ 0 & -3 & b+a \\ 0 & 2.5 & c-0.5a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + \frac{2.5}{3}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & a \\ 0 & -3 & b+a \\ 0 & 0 & c-0.5a+\frac{2.5}{3}(a+b) \end{array}\right)$$

קיבלנו שאין שורת סתירה אמ"מ $c-0.5a+\frac{2.5}{3}(a+b)=0$ ולכן

$$\begin{aligned} W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid c-0.5a+\frac{2.5}{3}(a+b)=0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid \frac{1}{3}a+\frac{5}{6}b+c=0 \right\} \end{aligned}$$

עוד נשים לב כי $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ בת"ל (אף וקטור לא כפולה של חברו) ולכן $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל W_2 שהרי $W_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ולכן פורשת את W_2. מכאן ש $\dim W_2 = 2$.

iii. מצאו בסיס ל $W_1 \cap W_2$ ול $W_1 + W_2$.

פתרון: נתחיל עם החיתוך: נתמש בהצגה לפי משוואות ונקבל כי

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid \begin{array}{c} a-2b+3c=0 \\ 2a-4b+6c=0 \\ 3a-7b+9c=0 \\ \frac{1}{3}a+\frac{5}{6}b+c=0 \end{array} \right\}$$

ונמצא בסיס ומימד כמו שעשינו עם W_1, כלומר נפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 3 & -7 & 9 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - \frac{1}{3}R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1,\, R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{6} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{9}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow -R_3]{R_2 \leftarrow \frac{6}{9}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - R_2]{R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו צורה מדורגת (קנונית) עם משתנה חופשי $x_3 = t$ ואז מהמשוואה השניה נקבל $x_2 = 0$ ומהמשוואה הראשונה נקבל $x_1 + 3t = 0$ כלומר $x_1 = -3t$ ולסיכום

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -3t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל $W_1 \cap W_2$ והמימד שווה 1. בנוסף קיבלנו כי $W_1 \cap W_2 = W_1$ ולכן לפי משפט המימדים

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 1 + 2 - 1 = 2$$

ומכיוון ש $W_2 \subseteq W_1 + W_2$ מאותו מימד הם שווים. כלומר $W_1 + W_2 = W_2$ וכבר מצאנו לו בסיס ומימד.
דרך ישירה יותר למצוא את הסכום היא להשתמש בהצגת span ולחשב

$$W_1 + W_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

וכעת - איך מוצאים בסיס? מדרגים את

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + \frac{5}{2} R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו צורה מדורגת ובעמודות $1,2$ יש איבר מוביל ולכן $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס (עמודות $1,2$ במטריצה שהתחלנו איתה) בסיס ל $W_1 + W_2$ והמימד הוא 2 כמו שראינו.

(ב) (בונוס) יהא V מ"ו ויהא W תת מרחב.
הוכיחו כי כל תת מרחב אפיני מהצורה $L = v + W$ מקיים כי $L = W$ או $L \cap W = \emptyset$.
פתרון: יהא $L = v + W$ תת מרחב אפיני. אם $L \cap W = \emptyset$ סיימנו. אחרת $L \cap W \neq \emptyset$ ולכן קיים $w \in L \cap W$. מכיוון ש $w \in L$ נקבל כי $L = w + W$ ומכיוון ש $w \in W$ נקבל כי $w + W = W$ ולכן $L = w + W = W$ כנדרש.