תרגיל 7

<u>הגדרות וסימונים</u>
ניישר קו בין קבוצות ההרצאה והתרגול לצורך התרגיל:

1. מרחב (X,τ) הוא B_2 אם קיים לו בסיס בן מניה.
2. הטופולוגיה הקו־מנייתית (לפעמים נקראת גם קו־בת־מניה) על קבוצה X מוגדרת ע"י

$$\tau_{cof} := \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X \mid |O^c| < \infty\}$$

3. פרה־בסיס (נקרא גם תת בסיס) על מרחב טופולוגי (X,τ) הוא קבוצה של קבוצות פתוחות $\alpha \subseteq \tau$ כך ש־$\alpha^{\cap_F}$ (כלומר אוסף החיתוכים הסופיים של קבוצות מ־α) הוא בסיס.
ישנו משפט שאומר שכל כיסוי α פתוח של X (כלומר אוסף של קבוצות פתוחות כך ש־$X = \bigcup \alpha$) הוא פרה־בסיס של $\left(\alpha^{\cap_F}\right)^{\cup}$.

<u>תרגילים</u>

1. הוכיחו שאם (X,τ) הוא מרחב B_2 אז $|\tau| \leq \aleph = 2^{\aleph_0}$.
<u>פתרון</u>

יהיה γ בסיס בן מניה ל־X. ראינו שלכל קבוצה פתוחה $O \in \tau$ קיימת תת קבוצה $\gamma_O \subseteq \gamma$ כך ש־

$$O = \bigcup \gamma_O$$

כלומר, ישנה התאמה חח"ע מ־τ לקבוצת החזקה של γ. מכיוון ש־γ בת מניה מתקיים ש־$|\mathcal{P}(\gamma)| \leq 2^{\aleph_0}$ ולכן גם $|\tau| \leq 2^{\aleph_0}$.

2. מצאו מתי הטופולוגיה הקו־בת־מניה (X,τ_{coc}) היא B_2.
<u>פתרון</u>

רק כאשר X בת מניה. ראשית, ברור שאם X בת מניה אז (X,τ_{coc}) דיסקרטית (בת מניה) ולכן B_2. מנגד, נניח ש־(X,τ_{coc}) היא B_2. למעשה, מספיק לנו להניח ש־X היא B_1. יהי $\beta \subseteq \tau_{coc}$ בסיס מקומי בן מניה ב־$x_0 \in X$. לפי הגדרה, לכל $U \in \tau_{coc}$ מתקיים ש־U^c בת מניה. נסמן

$$U^c = \left\{x_1^{(U)}, x_2^{(U)}, \dots\right\}$$

נגדיר פונקציה $\varphi : \beta \times \mathbb{N}^{>0} \to X \setminus \{x_0\}$

$$\varphi(U,n) := x_n^{(U)}$$

אנחנו טוענים שהפונקציה הזו היא על. יהי $x_0 \neq x \in X$. נשים לב ש־$x_0 \in X\backslash\{x\} \in \tau_{coc}$ היא סביבה ולפי הגדרת בסיס קיימת $U \in \beta$ כך ש־$U \subseteq X \setminus \{x\}$. בפרט, $x = x_n^{(U)}$ עבור $n \in \mathbb{N}^{>0}$ ולכן $x = \varphi(U,n)$. לפי משפט המכפלה של עוצמות אנחנו מסיקים ש־

$$|X| \leq |\beta \times \mathbb{N}| \leq \max\{|\beta|, \aleph_0\}$$

ולכן אם β בת מניה גם X.

3. הראו שבמרחב טופולוגי (X,τ) שהוא B_2 לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי בן מניה. כיסוי פתוח הוא אוסף $\{O_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ של תתי קבוצות פתוחות כך ש־$\bigcup_{i\in I} O_i = X$. תת כיסוי הוא תת קבוצה $J \subseteq I$ כך ש־$\{O_j\}_{j\in J}$ כיסוי.

<u>פתרון</u>

יהי $\{O_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ כיסוי פתוח של X ויהי γ בסיס בן מניה של X. מכיוון ש־$\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי של X, לכל $x \in X$ קיים $i_x \in I$ כך ש־$x \in O_{i_x}$. לפי הגדרת בסיס, קיימים $U_x \in \gamma$ כך ש־$x \in U_x \subseteq O_{i_x}$. מכיוון ש־γ בן מניה אנחנו יכולים ליצור מספור

$$\{U^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{U_x\}_{x\in X}$$

(שימו לב שכאן $U^{(n)}$ הוא סתם מספור ולא הנגזרת ה־n־ית). לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר $x(n) \in X$ כך ש־$U^{(n)} = U_{x(n)}$. לבסוף, נסתכל על

$$J := \{i_{x(n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq I$$

אנחנו טוענים ש־$\{O_j\}_{j\in J}$ תת כיסוי בן מניה. נראה שזה באמת המצב, כלומר ש־$\bigcup_{j\in J} O_j = X$. לכל $x \in X$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־$U^{(n)} = U_x$ ולכן

$$x \in U_x = U^{(n)} = U_{x(n)} \subseteq O_{i_{x(n)}} \subseteq \bigcup_{j\in J} O_j$$

כרצוי.

4. הראו שאם (X,τ) הוא B_2 אז לכל בסיס γ יש תת קבוצה בת מניה $\gamma' \subseteq \gamma$ שמהווה בסיס לטופולוגיה גם היא.

<u>פתרון</u>

יהי $\delta \subseteq \tau$ בסיס בן מניה (אחד כזה קיים כי X הוא B_2). אנחנו טוענים שלכל $O \in \delta$ קיימת תת קבוצה $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \gamma$ כך ש־$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. אכן, לפי הגדרת הבסיס, לכל $x \in O$ קיימות $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \gamma$ כך ש־

$$O = \bigcup_{i\in I} U_i$$

כלומר, לכל $x \in O$ קיימת $i_x \in I$ כך ש־$x \in U_{i_x}$. מכיוון ש־δ בסיס, קיים $V_x \in \delta$ כך ש־$x \in V_x \subseteq U_{i_x}$. נמספר $\{V_x\}_{x\in O} = \{V^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. לכל $n \in \mathbb{N}$ נבחר $x^{(n)} \in O$ כך ש־$V_{x^{(n)}} = V^{(n)}$. קל לראות ש־

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{i_{x^{(n)}}}$$

הצלחנו להראות שכל $O \in \delta$ ניתן להצגה כ־

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^{(O)}$$

עבור $U_n^{(O)} \in \gamma$ לכל $n \in \mathbb{N}$. נבחר

$$\gamma' := \left\{U_n^{(O)}\right\}_{O\in\delta, n\in\mathbb{N}}$$

ישנה פונקציה על $\varphi : \delta\times\mathbb{N} \to \gamma'$ שמוגדרת ע"י $\varphi(O,n) := U_n^{(O)}$ ולכן $|\gamma'| \le |\delta\times\mathbb{N}|$. מכיוון ש־$\delta$ בת מניה גם γ' בת מניה. לבסוף, γ' גם בסיס כי

$$\tau \supseteq (\gamma')^{\cup} \supseteq \delta^{\cup} = \tau$$

5. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ותהי $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ משפחה של תתי קבוצות. לכל $A \in \mathcal{J}$ ו־$\varepsilon > 0$ נגדיר

$$W_A(\varepsilon) := \Big\{f : X \to \mathbb{R} \mid \forall x \in A : |f(x)| < \varepsilon\Big\} \subseteq \mathbb{R}^X$$

נגדיר גם

$$\alpha_{\mathcal{J}} := \Big\{f + W_A(\varepsilon) \mid f \in \mathbb{R}^X, A \in \mathcal{J}, \varepsilon > 0\Big\}$$

שימו לב שחיבור של פונקציה עם קבוצה מוגדר לפי

$$\forall f \in \mathbb{R}^X, \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^X : f + \mathcal{A} := \{f + g \mid g \in \mathcal{A}\}.$$

הראו ש־$\alpha_{\mathcal{J}}$ הוא תמיד פרה־בסיס ל־$\mathbb{R}^X$. בנוסף, עבור כל אחת מהאפשרויות הבאות ל־$\mathcal{J}$ קבעו אם $\alpha_{\mathcal{J}}$ הוא בסיס. הוכיחו את טענותיכם.

(א) $\mathcal{J}_1 := \{\{x\} \mid x \in X\}$ ־ כלומר קבוצת כל הנקודונים

(ב) $\mathcal{J}_2 := \{F \subseteq X \mid |F| < \infty\}$ ־ כלומר קבוצת הקבוצות הסופיות.

(ג) $\mathcal{J}_3 := \{B \subseteq X \mid B \text{ is bounded}\}$ ־ כלומר כל הקבוצות החסומות (כאן צריך להניח ש־X הוא מטרי)

(ד) $\mathcal{J}_4 := \{B \subseteq X \mid B \text{ is connected}\}$ ־ כלומר כל הקבוצות הקשירות

(ה) $\mathcal{J}_5 := \{X\}$

<u>פתרון</u>

ראינו שכדי שתת קבוצה של τ תהיה פרה־בסיס מספיק לוודא שהיא כיסוי. ואכן, קל לוודא שלכל A ולכל $\varepsilon > 0$ מתקיים ש־$0 \in W_A(\varepsilon)$ ולכן $f \in f + W_A(\varepsilon)$. במילים אחרות, α_J אכן מכסה כל $f \in \mathbb{R}^X$.

i. זה אינו בסיס אם X מכיל יותר מנקודה אחת. אכן, אם $x \neq y \in X$ אז אין אף נקודון $z \in X$ ו־$f \in \mathbb{R}^X$ כך ש־$f+W_{\{z\}}(\varepsilon) \subseteq \Big(W_{\{x\}}(1)\Big)\cap\Big(W_{\{y\}}(1)\Big)$.

ii. זה אכן בסיס. קל לראות ש־$W_{A\cup B} = \Big(W_A(\varepsilon)\Big) \cap \Big(W_B(\varepsilon)\Big)$. מכיוון שאיחוד של קבוצות סופיות הוא סופי, α_{J_2} סגור לחיתוכים סופיים.

iii. טיעון דומה לסעיף הקודם אבל משתמשים בעובדה שאיחוד סופי של קבוצות חסומות הוא חסום.

iv. זה לאו דווקא בסיס. אם נסתכל על $X = \mathbb{R}$ אז אין אף קבוצה קשירה $A \subseteq \mathbb{R}$ כך ש־

$$W_A(\varepsilon) \subseteq \Big(W_{[0,1]}(1)\Big) \cap \Big(W_{[2,3]}(1)\Big)$$

v. כן. α_{J_5} היא קבוצה מונוטונית של קבוצות ולכן חיתוך סופי שלהן שקול לפעולת המינימום. מכאן ש־α_{J_5} הוא בסיס ולא סתם פרה־בסיס. (למעשה, זה בעצם הבסיס של הטופולוגיה של התכנסות אחידה).

6. בסימונים של התרגיל הקודם, מצאו את היחסים בין הטופולוגיות שמושרות ע"י $\alpha_{\mathcal{J}_1}, \alpha_{\mathcal{J}_2}, \alpha_{\mathcal{J}_3}, \alpha_{\mathcal{J}_4}, \alpha_{\mathcal{J}_5}$ במקרים הבאים:

(א) $X = \mathbb{R}$

(ב) $X = \mathbb{Q}$

(ג) $X = [0,1]$

(ד) $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2n, 2n+1]$

<u>פתרון</u>

קל לראות שאם $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ אז הטופולוגיה שמושרית מ־$\alpha_{\mathcal{I}}$ חלשה מהטופולוגיה שמושרית מ־$\alpha_{\mathcal{J}}$. לכן, צריך בעצם למיין את $\{\mathcal{J}_i\}_{i=1}^5$ בכל אחד מהמקרים. נשים לב שהטופולוגיה שמושרית מ־$\alpha_{\mathcal{J}_1}$ כפרה־בסיס שקולה לטופולוגיה שמושרית מ־$\alpha_{\mathcal{J}_2}$ כבסיס ללא תלות ב־X. בנוסף, כל קבוצה סופית היא חסומה ולכן אפשר לרשום

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 \subseteq \mathcal{J}_3 \subseteq \mathcal{J}_5$$

נסמן ב־τ_i את הטופולוגיה שמושרית מ־$\alpha_{\mathcal{J}_i}$.

i. במקרה ש־$X = \mathbb{R}$ מתקיים ש־X רציף ולכן לכל $W_{\mathbb{R}}(\varepsilon) \in \alpha_{J_4}$ וגם לכל A קשירה מתקיים ש־$W_{\mathbb{R}}(\varepsilon) \subseteq W_A(\varepsilon)$. אפשר להסיק מכאן ש־$\tau_4 = \tau_5$. אז

$$\tau_1 = \tau_2 \subsetneq \tau_3 \subsetneq \tau_4 = \tau_5$$

ii. במקרה ש־$X = \mathbb{Q}$ אז הקבוצות הקשירות היחידות הם הנקודונים (כי X בלתי קשיר לחלוטין). לכן

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_4 \subsetneq \tau_3 = \tau_5$$

iii. אם $X = [0,1]$ אז הוא חסום וגם קשיר. מכאן ש־

$$\tau_1 = \tau_2 \subsetneq \tau_3 = \tau_4 = \tau_5$$

iv. אם $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2n,2n+1]$ אז כל קבוצה קשירה היא חסומה (אבל ההפך אינו נכון). לכן

$$\tau_1=\tau_2\subsetneq\tau_4\subsetneq\tau_3\subsetneq\tau_5$$