

מספר שאלות לדוגמה בפורמט של המבחן (השתמשתי בשאלות שמופיעות בקובץ החזרה)חלק א'שאלה 1

במספר חנויות בדקו מחירים של סלסילות שי לחגים עם תכולה דומה, והשוו למחירי רכיבי התכולה כשהם נקנים בנפרד. התקבלו הנתונים הבאים:

חנות	א	ב	ג	ד	ה
מחיר סלסלה	109	99	99	119	109
מחיר התכולה בנפרד	82	75	70	85	84

רווח סמך ברמת בטחון 98% לתוחלת ההבדלים במחירים בין סלסלה מוכנה ומרכיביה יהיה (הקף את הקרוב ביותר):

א. $[21.16, 34.44]$

ב. $[22.16, 35.44]$

ג. $[24.82, 30.77]$

ד. $[23.67, 31.93]$

נמק/י:

שאלה 2

בכדי לאמוד את אחוז הגירושין בארה"ב נלקח מדגם מקרי של 625 איש ונמצא ש-125 מהם גרושים. לפניך שני משפטים, עליך לבחור את התשובה שמתאימה ביותר עבור שניהם יחדיו.

(i) הגדלת המדגם פי 4 תשפיע על אורך רו"ס באופן ש-

(ii) גודל המדגם (n) הדרוש כדי להקטין את אורך הרווח פי 2, יהיה-א. (i) תקטין את אורך רווח הסמך פי 2; (ii) $n = 4269$ ב. (i) תקטין את אורך רווח הסמך פי 2; (ii) $n = 65$ ג. (i) לא ניתן לדעת איך תשפיע הגדלת המדגם; (ii) $n = 4269$ ד. (i) הגדלת המדגם לא תשפיע על אורך רווח הסמך; (ii) $n = 4269$

נמק/י:

שאלה 3

נתון א': משקלם (בגרמים) של 12 עכברים אשר הואכלו במשך 28 ימים בשמן דגים :

24, 23.5, 24, 24, 25, 22.5, 20, 23.5, 28.5, 18, 20, 26

נתון ב': משקל ממוצע של עכבר רגיל מסוג זה הוא 22 גרם.

מבקשים לבדוק את ההשערות, ברמת מובהקות 0.05 :

H_0 – שמן דגים אינו משפיע באופן מובהק על משקל העכבר הממוצע.

H_1 – שמן דגים משפיע באופן מובהק על משקל העכבר הממוצע.

לפי הנתונים הנ"ל, מי מהמשפטים הבאים הנכון ביותר :

- יש לבצע מבחן Z לבדיקת ההשערה. נדחה את H_0 ברמת המובהקות הנתונה.
- יש לבצע מבחן Z לבדיקת ההשערה. לא נדחה את H_0 ברמת המובהקות הנתונה.
- יש לבצע מבחן t לבדיקת ההשערה. נדחה את H_0 ברמת המובהקות הנתונה.
- יש לבצע מבחן t לבדיקת ההשערה. לא נדחה את H_0 ברמת המובהקות הנתונה.

נמק'י :

חלק ב'שאלה 1

בשק נמצאים שישה תלושי הגרלה עם סכומי זכייה בש"ח : על שלושה רשום המספר 0, על שניים המס' 20 ועל אחד המס' 40.

מהמר נדרש לשלם 20 ש"ח על מנת להשתתף בהגרלה. עליו למשוך שני תלושים מהשק והוא זוכה בסכום אשר שווה לממוצע החשבוני של שני המספרים ששלף. מצא את :

- פונקציית התפלגות הסכום שהמהמר מקבל. הגדר מ"מ X – הסכום שהמהמר מקבל.
- תוחלת ושונות הרווח של המהמר. הגדר מ"מ Y – הרווח של המהמר.

פתרון:

פתרונות

חלק א'

שאלה 1

במספר חנויות בדקו מחירים של סלסילות שי לחגים עם תכולה דומה, והשוו למחירי רכיבי התכולה כשהם נקנים בנפרד. התקבלו הנתונים הבאים:

חנות	א	ב	ג	ד	ה
מחיר סלסלה	109	99	99	119	109
מחיר התכולה בנפרד	82	75	70	85	84

רווח סמך ברמת בטחון 98% לתוחלת ההבדלים במחירים בין סלסלה מוכנה ומרכיביה יהיה (הקף את הקרוב ביותר):

א. $[21.16, 34.44]$

ב. $[22.16, 35.44]$

ג. $[24.82, 30.77]$

ד. $[23.67, 31.93]$

$$27.8 - 3.75 \cdot \frac{3.96}{\sqrt{5}} \leq \mu_d \leq 27.8 + 3.75 \cdot \frac{3.96}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{21.16 \leq \mu_d \leq 34.44} \quad \text{נמק'י:}$$

שאלה 2

בכדי לאמוד את אחוז הגירושין בארה"ב נלקח מדגם מקרי של 625 איש ונמצא ש-125 מהם גרושים.

לפניך שני משפטים, עליך לבחור את התשובה שמתאימה ביותר עבור שניהם יחדיו.

(iii) הגדלת המדגם פי 4 תשפיע על אורך רו"ס באופן ש-

(iv) גודל המדגם (n) הדרוש כדי להקטין את אורך הרווח פי 2, יהיה-

א. (i) תקטין את אורך רווח הסמך פי 2; (ii) $n = 4269$

ב. (i) תקטין את אורך רווח הסמך פי 2; (ii) $n = 65$

ג. (i) לא ניתן לדעת איך תשפיע הגדלת המדגם; (ii) $n = 4269$

ד. (i) הגדלת המדגם לא תשפיע על אורך רווח הסמך; (ii) $n = 4269$

נמק'י: (i) מכיוון שהפרופורציה עצמה תלויה בגודל n ולא רק רווח הסמך, אם נגדיל את גודל המדגם לא ברור כיצד רווח הסמך ישתנה.

$$1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} = 0.5 \cdot 0.03 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} = \frac{0.015}{1.96} \Leftrightarrow \boxed{n = 4268.4} \quad (\text{ii})$$

נעגל ונקבל שגודל המדגם **4269**.

פתרון מפורט מעבר לנדרש בנימוק:

(i) מכיוון שהפרופורציה עצמה תלויה בגודל n ולא רק רווח הסמך, אם נגדיל את גודל המדגם **לא ברור כיצד רווח הסמך ישתנה**. הדבר שונה מרווח הסמך עבור תוחלת שבו אם נגדיל את n רווח הסמך יקטן.

(ii) מכיוון שכפי שצינו לעיל שינוי גודל המדגם משפיע גם על הפרופורציה, ואין לנו שום מידע לגבי הפרופורציה באוכלוסייה נציב $\hat{p} = 0.5$ עבורו הביטוי $\hat{p}(1 - \hat{p})$ מקבל ערך מקסימאלי כך שנקבל חסם עליון ל- n . כדי להקטין את אורך הרווח פי 2 אפשר פשוט להקטין את הסטייה מ- \hat{p} פי 2, כלומר:

$$1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} = 0.5 \cdot 0.03$$

$$\boxed{n = 4268.4} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} = \frac{0.015}{1.96}$$

נעגל ונקבל כי יש לקחת מדגם בגודל של **4269** כדי להקטין את הרווח פי 2.

שאלה 3

נתון א': משקלם (בגרמים) של 12 עכברים אשר הואכלו במשך 28 ימים בשמן דגים:
24, 23.5, 24, 24, 25, 22.5, 20, 23.5, 28.5, 18, 20, 26

נתון ב': משקל ממוצע של עכבר רגיל מסוג זה הוא 22 גרם.

מבקשים לבדוק את ההשערות, ברמת מובהקות 0.05:

H_0 – שמן דגים אינו משפיע באופן מובהק על משקל העכבר הממוצע.

H_1 – שמן דגים משפיע באופן מובהק על משקל העכבר הממוצע.

לפי הנתונים הנ"ל, מי מהמשפטים הבאים הנכון ביותר:

- יש לבצע מבחן Z לבדיקת ההשערה. נדחה את H_0 ברמת המובהקות הנתונה.
- יש לבצע מבחן Z לבדיקת ההשערה. לא נדחה את H_0 ברמת המובהקות הנתונה.
- יש לבצע מבחן t לבדיקת ההשערה. נדחה את H_0 ברמת המובהקות הנתונה.
- יש לבצע מבחן t לבדיקת ההשערה. לא נדחה את H_0 ברמת המובהקות הנתונה.

נמק/י: השונות לא ידועה לכן יש לבצע מבחן t לבדיקת ההשערה. לא נדחה H_0 כי :

$$\bar{x} = \boxed{23.25} \not> \boxed{23.81} = 22 + 2.201 \cdot \frac{2.848}{\sqrt{12}} = \mu_0 + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\text{וגם: } \bar{x} = \boxed{23.25} \not< \boxed{20.19} = 22 - 2.201 \cdot 2.848 / \sqrt{12}$$

פתרון מפורט מעבר לנדרש בנימוק:

(הערה: אין צורך לכתוב את ההשערות לבדיקה אם לא נתבקשתם במפורש)

ברצוננו לבדוק את ההשערות :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 22 \\ H_1 : \mu \neq 22 \end{cases}$$

השונות לא ידועה \Rightarrow יש לבצע מבחן t לבדיקת ההשערה.

נשתמש במבחן דו צדדי, אנו מבקשים לבדוק קיום השפעה שלא ידוע לנו כיוונה :

$$\text{דחה: } H_0 \text{ אם } \bar{x} < \mu_0 - t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \text{ או- } \bar{x} > \mu_0 + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\text{נחשב: } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 23.25, \quad S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 2.848$$

$$t_{12-1, 1-\alpha/2} = t_{11, 0.975} = 2.201 \leq (1 - \alpha = 0.95, n = 12)$$

$$\boxed{23.25} = \bar{x} \stackrel{(?)}{>} \mu_0 + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 22 + 2.201 \cdot \frac{2.848}{\sqrt{12}} = \boxed{23.81}$$

$$\boxed{23.25} = \bar{x} \stackrel{(?)}{<} 22 - 2.201 \cdot 2.848 / \sqrt{12} = \boxed{20.19}$$

אי השוויון לא מתקיים \Rightarrow ולכן לא נדחה את השערת האפס.

(הערה: במקרה זה די ברור שגם הכיוון השני לא מתקיים, אבל במקרה של ספק – חובה לבדוק).

המסקנה: האכלה בשמן דגים לא משנה באופן מובהק (סטטיסטית) את משקל העכברים.

חלק ב'שאלה 1

בשק נמצאים שישה תלושי הגרלה עם סכומי זכייה בש"ח: על שלושה רשום המספר 0, על שניים המס' 20 ועל אחד המס' 40.

מהמר נדרש לשלם 20 ש"ח על מנת להשתתף בהגרלה. עליו למשוך שני תלושים מהשק והוא זוכה בסכום אשר שווה לממוצע החשבוני של שני המספרים ששלף. מצא את:

א. פונקציית התפלגות הסכום שהמהמר מקבל. הגדר מ"מ X – הסכום שהמהמר מקבל.

ב. תוחלת ושונות הרווח של המהמר. הגדר מ"מ Y – הרווח של המהמר.

פתרון:

נגדיר מ"מ: X – הסכום שהמהמר מקבל.

א. נבנה את פונקציית התפלגות של X בטבלה (אפשר לוותר על העמודה האמצעית):

הסתברות	המקרה	הסכום המתקבל (X) = הממוצע
$\binom{3}{2} / \binom{6}{2} = 3/15$	0,0	0
$\binom{2}{1} \binom{3}{1} / \binom{6}{2} = 6/15$	0,20	10
$\binom{2}{2} / \binom{6}{2} + \binom{3}{1} \binom{1}{1} / \binom{6}{2} = 4/15$	40,0 או 20,20	20
$\binom{1}{1} \binom{2}{1} / \binom{6}{2} = 2/15$	40,20	30

ב. נגדיר מ"מ: Y – הרווח של המהמר. מתקיים $Y = X - 20$.

למצוא את $E[Y], V[Y]$ נחשב תחילה $E[X], V[X]$ ואח"כ נעזר בתכונות התוחלת והשונות לעבור ל- Y :

$$E(X) = 0 \cdot (3/15) + 10 \cdot (6/15) + 20 \cdot (4/15) + 30 \cdot (2/15) = 40/3$$

$$E(Y) = E(X - 20) = E(X) - 20 = \boxed{-20/3}$$

$$Var(Y) = Var(X - 20) = Var(X)$$

$$Var(x) = E(x^2) - E(X)^2 = 0 \cdot (3/15) + 10^2 \cdot (6/15) + 20^2 \cdot (4/15) + 30^2 \cdot (2/15) - [40/3]^2 = \boxed{800/9}$$