# מבנים אלגבריים*

DRAFT

טיוטת תרגיל בית 7†

**תזכורות ומושגים**

- הומומורפיזם של חבורות $f$ הוא פונקציה בין חבורות $f\colon G\to H$ המקיימת, לכל $g_1,g_2\in G$, את השויון $f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)$. אם $f$ חח"ע אז הוא נקרא מונומורפיזם. אם $f$ על אז הוא נקרא אפימורפיזם. אם $f$ חח"ע ועל אז הוא נקרא איזומורפיזם.
- יהיו $G,H$ חבורות. אם קיים איזומורפיזם $f\colon G\to H$ אז אומרים ששתי החבורות איזומורפיות זו לזו, ומסמנים $G\cong H$.
- יהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם. נסמן $\ker f=\{g\in G\colon f(g)=e_H\}$. זהו הגרעין של ההעתקה $f$.
- יהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם. נסמן $\mathrm{Im}f=\{h\in H\colon \exists g\in G, f(g)=h\}$. זו התמונה של ההעתקה $f$.
- מתקיים $\ker f\lhd G$ וכן $\mathrm{Im}f\leq H$. $\ker f=\{e_G\}$ אם ורק אם $f$ מונומורפיזם.
- נניח $f$ הומומורפיזם מחבורה $G$, ונניח $S$ היא קבוצה יוצרת של חבורה $G$. אם נתונים ערכי $f$ על איברי $S$, אז ניתן לקבוע באופן יחיד את $f$. מנגד, אם נתונים ערכי העתקה $g$ על איברי $S$, לא בטוח שניתן להשלים את ערכי $g$ להומומורפיזם.

**שאלה 1** תהיינה $G,H$ חבורות.

1. נגדיר העתקה $f\colon G\to G\times H$ על ידי $g\overset{f}{\mapsto}(g,e_H)$. הראו כי $f$ הומומורפיזם של חבורות, חשבו את הגרעין $\ker f$ ואת התמונה $\mathrm{Im}f$. האם זהו מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם?
2. נגדיר העתקה $f\colon G\times H\to G$ על ידי $(g,h)\overset{f}{\mapsto}g$. הראו כי $f$ הומומורפיזם של חבורות, חשבו את הגרעין $\ker f$ ואת התמונה $\mathrm{Im}f$. האם זהו מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם?

*נא לרשום על התרגיל את שם התלמיד, מספר זיהוי ומספר קבוצה.

†יש להגיש בשיעור התרגיל בפרשת בא:
קבוצה 03 – הגשה בשיעור ביום שני, כ"ז בטבת (30 דצמ').
שאר הקבוצות – הגשה בשיעור ביום חמישי, א' בשבט (2 ינו').

DRAFT

**שאלה 2** בכל סעיף קבעו האם החבורות הן איזומורפיות. הסבירו קביעתכם.

1. $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$ ו $\mathbb{Z}_{121}$.
2. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ ו $\mathbb{Z}_{21}$.
3. $\mathbb{R}$ ו $\mathbb{R}^*$. (שימו לב מה פעולת החבורה בשתי החבורות האלו).
4. $S_3$ ו $D_3$.
5. $S_4$ ו $D_{12}$.
6. $D_4$ ו $Q_8$ (חבורת הקווטרניונים, שהופיעה כבר בתרגיל בית 5; שימו לב לתיקון שהובא באתר הקורס לגבי חבורה זו).

**הערה** גם בשאלה זו די לציין בפירוש כי העתקה מסוימת היא איזומורפיזם, ללא הוכחה.

**שאלה 3** הוכיחו שהחבורה $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0) \right\}$ עם פעולת כפל מטריצות היא איזומורפית ל־$\mathbb{C}^*$.

**שאלה 4** תהי $G$ חבורה, $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$.

1. הוכיחו $H \cap N$ היא תת־חבורה נורמלית של $H$.
2. לכל $a\left(H \cap N\right) \in {}^{H}/_{H \cap N}$ נגדיר $\phi\left(a\left(H \cap N\right)\right) = aN$. הוכיחו כי $\phi$ מוגדרת היטב. כלומר, לכל $a,b \in H$, אם $a\left(H \cap N\right) = b\left(H \cap N\right)$, אזי $\phi(a\left(H \cap N\right)) = \phi\left(b\left(H \cap N\right)\right)$. זאת אומרת שהתמונה של $\phi$ אינה תלוייה בבחירת נציג מחלקת שקילות ובכך מגדירה פונקציה מ ${}^{H}/_{H \cap N}$ ל ${}^{G}/_{N}$.
3. הראה ש $\phi$ היא מונומורפיזם.

**שאלה 5** יהי $f : G \to H$ הומומורפיזם של חבורות.

1. הוכיחו כי הסדר של התמונה $\mathrm{Im}f$ מחלק את $\gcd\left(|G|, |H|\right)$.
2. מה האפשרויות ל־$\mathrm{Im}f$ בשני המקרים הבאים:

   (א) $f : \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{18}$.

   (ב) $f : \mathbb{Z}_{15} \to D_5$.

   **רמז** היעזרו בסעיף 1 למציאת הסדרים האפשריים של $\mathrm{Im}f$. לאחר מכן מצאו את כל התת"ח של $H$ מסדרים אלו.

   **שימו לב!** לכל אפשרות שמצאתם ל־$\mathrm{Im}f$, יש להראות כי קיים הומומורפיזם $f$ תואם. הדרך הנוחה ביותר להראות קיום היא למצוא הומומורפיזם כזה. בשאלה זו די לציין את ההומומורפיזם $f$, בלא כל הוכחה לגביו.

   (ג) (אתגר) מצאו כמה הומומורפיזמים שונים יש בשני מקרים אלו.

DRAFT

3. נניח כי $f\colon Q_8 \to \mathbb{Z}_8$ הומומורפיזם של חבורות.

(א) הוכיחו כי $f$ איננו על, ולכן $|\mathrm{Im} f| \neq 8$.

(ב) מצאו $f$ כזה שיקיים $|\mathrm{Im} f| = 2$.

(ג) (אתגר) הראו כי לא יכול להיות $|\mathrm{Im} f| = 4$.